Полякова Е.А.,
учитель математики г. Белгород

Применение производной при решении некоторых задач с параметрами

В последние годы на вступительных экзаменах, на итоговом тестировании в форме ЕГЭ предлагаются задачи с параметрами. Эти задачи позволяют диагностировать уровень математического и, главное, логического мышления абитуриентов, способность осуществлять исследовательскую деятельность, а также просто знание основных разделов школьного курса математики.

При решении некоторых задач с параметрами используются наглядно-графические соображения. При построении необходимого графического образа приходится обратиться к аппарату производной. Метод, рассматриваемый в таких заданиях, состоит в следующем.

- Из уравнения с переменной x и параметром a выражаем параметр a как функцию от x: $a = f(x)$.
- В координатной плоскости xOa строим график функции $a = f(x)$.
- Рассматриваем прямые $a=const$ и выделяем те промежутки оси Oa, на которых эти прямые удовлетворяют следующим условиям: а)не пересекают график функции $a = f(x)$, б)пересекают график функции $a = f(x)$ в одной точке, в)в двух точках, г)в трёх точках и т. д.
- Если поставлена задача найти значения x, то выражаем x через a для каждого из найденных промежутков значений a в отдельности.

Описанный метод очень нагляден. Кроме того, в нём находят применение все основные понятия курса алгебры и начал анализа. Задействуется весь набор знаний, связанных с исследованием функции: применение производной к определению точек экстремума, нахождение предела функции, асимптот…

Пример 1.Найти число корней уравнения $x = ae^x$ в зависимости от параметра a.

Выразим a через x: $a(x) = \frac{x}{e^x}$. Поскольку $e^x \neq 0$ при любых x, то $D(a) = (-\infty;+\infty)$. Легко видеть, что функция $a(x) = \frac{x}{e^x}$ непрерывна на числовой оси; $a'(x) = \frac{1-x}{e^x}$. При x=1 $a'(x) = 0$. Если $x < 1$, то функция $a(x)$ возрастает, если $x > 1$, то $a(x)$ убывает. Значит, x=1 – точка максимума функции $a(x)$, $a_{\max} = \frac{1}{e}$.
Далее установим, как ведёт себя функция $a(x)$ при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Обращаемся к понятию предела функции:

При $x \to -\infty$: $\lim \dfrac{x}{e^x} = \lim xe^{-x} = -\infty$, а при $x \to +\infty$: $\lim \dfrac{x}{e^x} = \lim \dfrac{x'}{(e^x)'} = \lim \dfrac{1}{e^x} = 0$.

График функции $a(x) = \dfrac{x}{e^x}$ показан на рис.1.

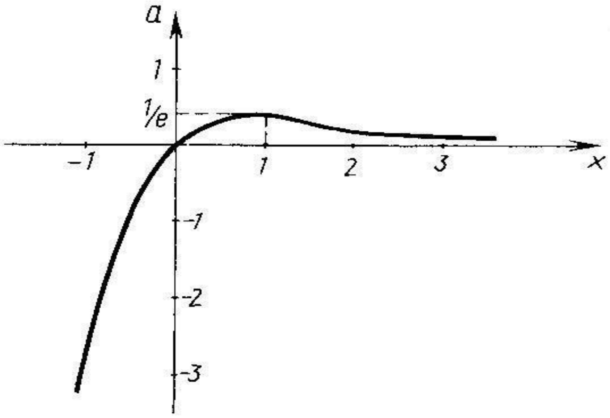

Рис.1

По нему видно, что при $a \in (-\infty;0] \cup \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$ уравнение $x = ae^x$ имеет одно решение, при $a \in (0;\dfrac{1}{e})$ - два решения. При других значениях параметра *a* это уравнение не имеет решений.

Ответ: при $a \in (-\infty;0] \cup \left\{\dfrac{1}{e}\right\}$ одно решение; при $a \in (0;\dfrac{1}{e})$ - два решения; при других *a* решений нет.

Пример 2. Установить число корней уравнения $x^3 = ax + 1$ в зависимости от параметра *a*.

Очевидно, что *x*=0 не является корнем данного уравнения при любом значении *a*. Выразим *a* через x: $a(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x}$ или $a(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$. Функция $a(x)$ определена на $(-\infty;0) \cup (0;+\infty)$ и непрерывна на промежутках $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$. Рассмотрим поведение функции $a(x)$ на каждом из этих промежутков.

$a'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$; $a'(x) = 0$ при $x = -\sqrt[3]{0,5}$ и $x = -\sqrt[3]{0,5}$ есть точка минимума функции $a(x)$ на промежутке $(-\infty;0)$, причём $a_{\min} = 1,5\sqrt[3]{2} \approx 1,95$ и $a(x) > 0$ при любом *x* из промежутка $(-\infty;0)$.

На промежутке $(0;+\infty)$ $a'(x)>0$, причём $a(1)=0$ и $a(x)<0$ при $x\in(0;1)$, $a(x)>0$ при $x\in(0;+\infty)$, т.е. на промежутке функция $a(x)$ не имеет экстремума, она строго возрастает.

Покажем график функции $a(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$ (см. рис. 2).

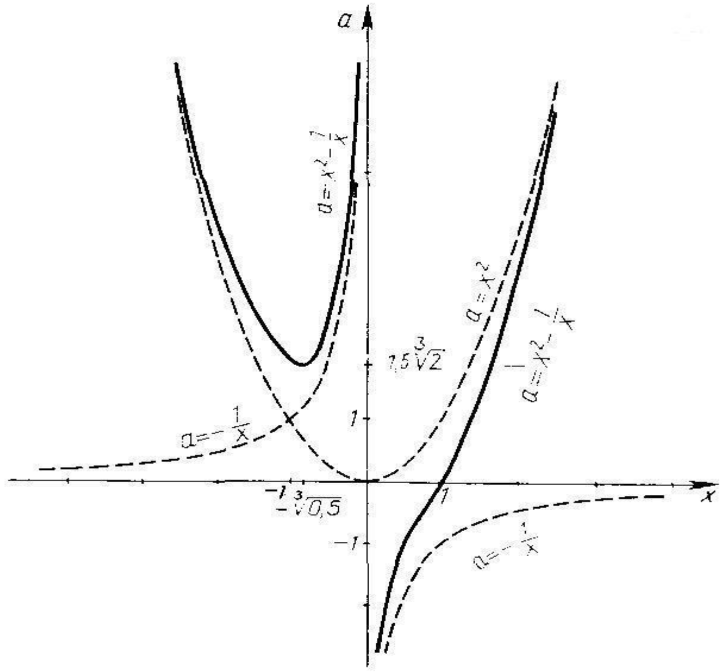

Рис.2

Прямые *a=const* при $a\in(-\infty;1{,}5\sqrt[3]{2})$ пересекают график в одной точке (значит, исходное уравнение имеет один корень). Прямая $a=1{,}5\sqrt[3]{2}$ пересекает график $a(x)$ в двух точках (два корня при $a=1{,}5\sqrt[3]{2}$). Если $a\in(1{,}5\sqrt[3]{2};+\infty)$, то прямая *a=const* пересекает график функции $a(x)$ в трёх точках (три корня).

Заметим, что мы только «прикинули», как пойдёт график функции $a(x)$. Этого вполне достаточно для ответа на вопрос задания. Но положение графика можно уточнить, заметив, что при $x\to\pm\infty$ значения функции $a(x)=x^2-\dfrac{1}{x}$ всё менее отличаются от соответствующих значений x^2, оставаясь, тем не менее, или больше их (при $x\to-\infty$), или меньше их (при $x\to+\infty$). При $x\to 0$ значения функции $a(x)$ приближаются к соответствующим значениям выражения $-\dfrac{1}{x}$. Оставаясь больше их. Графически это означает, при $x\to\pm\infty$ график $a(x)$ приближается сверху к левой ветви параболы $a=x^2$ и снизу – к её правой ветви. При $x\to 0$ график $a(x)$ приближается сверху к гиперболе $a=-\dfrac{1}{x}$. Вспомогательные парабола и гипербола изображены на рис.2 пунктиром.

Ответ: один корень при $a\in(-\infty;1{,}5\sqrt[3]{2})$; два корня при $a=1{,}5\sqrt[3]{2}$; три корня при $a\in(1{,}5\sqrt[3]{2};+\infty)$.

Пример 3.Дана система неравенств

$$\begin{cases} ax \le 0, \\ x^2 \le a + 8, \\ x^2 + (a+6) \ge 4{,}25. \end{cases}$$

При каждом значении a решения системы принадлежат отрезкам, параллельным оси Ox. Найти значения a, при которых множество решений системы есть отрезок наименьшей длины в координатной плоскости xOa.

Перепишем заданную систему в виде $\begin{cases} a \le \dfrac{8}{x}, \\ a \ge x^2 - 8, \\ x^2 + (a+6)^2 \ge 4{,}25. \end{cases}$ Строим графики уравнений: $a = \dfrac{8}{x}$ (гипербола), $a = x^2 - 8$ (парабола) и $x^2 + (a+6)^2 = 4{,}25$ (окружность).

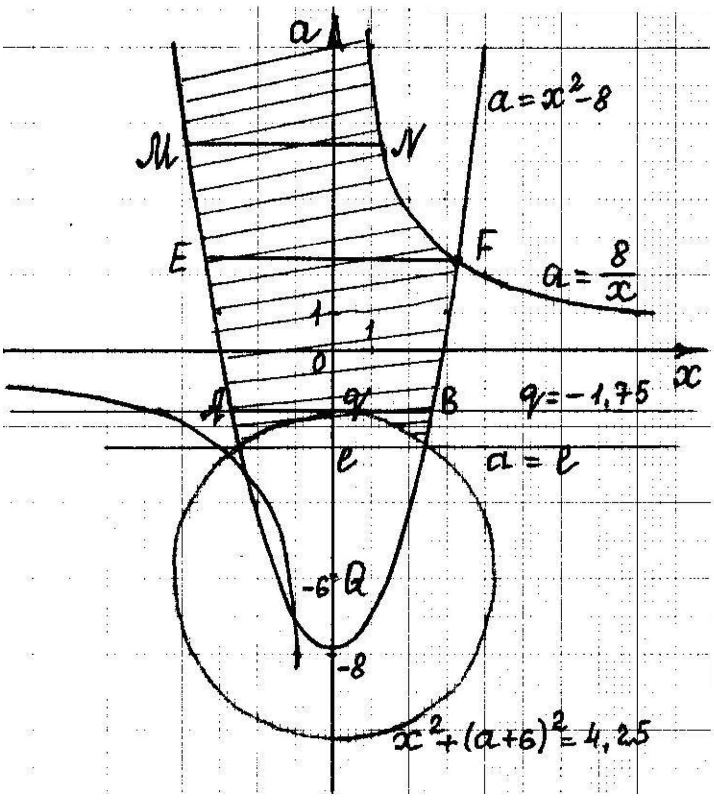

Рис.3

На рис.3 множество точек, координаты которых являются решениями данной системы, выделены штриховкой. Сначала кажется, что при $a \in [l; q]$ в выделенной области существуют отрезки (принадлежащие *a=const)* сколь угодно малой длины. Но при таких a в этой области оказывается не один отрезок прямой *a=const*, а объединение двух непересекающихся отрезков.

Множество решений в виде одного отрезка получается при каждом $a \ge q$, где $q = -6 + 4{,}25 = -1{,}75$.

Из рисунка видно, что *AB* – первый из таких отрезков.

При возрастании a отрезки прямых $a=const$, лежащие в выделенной области, увеличиваются, доходя до EF, затем уменьшаются до какого-то отрезка MN и снова возрастают.

Какой же из отрезков меньше: AB или MN?

Полагая, что x_A и x_B - абсциссы точек A и B соответственно, находим длину AB:

$$x_B - x_A = \sqrt{a+8} - (-\sqrt{a+8}) = 2\sqrt{-1{,}75+8} = 5.$$

Пусть $x_M\,(x_N)$ - абсцисса точки $M(N)$.

Точка M лежит на левой ветви параболы $a = x^2 - 8$, т.е. $x_M = -\sqrt{a+8}$, точка N расположена на верхней части гиперболы $a = \frac{8}{x}$, т.е. $x_N = \frac{8}{a}$ (в обоих случаях $a>0$). Значит, длина отрезка MN есть функция от a:

$f(a) = x_N - x_M = \frac{8}{a} + \sqrt{a+8}$, где $a>0$, т.е. $f(a) = \frac{8}{a} + \sqrt{a+8}$, тогда

$$f'(a) = -\frac{8}{a^2} + \frac{1}{2\sqrt{a+8}} = \frac{a^2 - 16\sqrt{a+8}}{2a^2\sqrt{a+8}}$$ и $f'(a) = 0$, если $a^2 - 16\sqrt{a+8} = 0$,

$$a^4 - 256a - 2048 = 0.$$

По схеме Горнера устанавливаем, что

$a^4 - 256a - 2048 = (a-8)(a^3 + 8a^2 + 64a + 256)$, т.е. $(a-8)(a^3 + 8a^2 + 64a + 256) = 0$,

откуда $\left[\begin{array}{l} a - 8 = 0 \\ a^3 + 8a^2 + 64a + 256 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow a = 8.$

Знак f'	0	-	8	+	
Поведение f			min		a

Оказалось, что $a = 8$ – точка минимума функции $f(a)$; $f(8) = 5$.

Значит, $MN=AB$ и существуют два значения a, дающие наименьшую длину искомых отрезков, т.е. $a_1 = -1{,}75$ и $a_2 = 8$.

Ответ: $a_1 = -1{,}75$, $a_2 = 8$.

Рассмотрим другие примеры, в решении которых можно использовать описанный метод.

Пример 4.Найти все значения параметра а, при которых уравнение $\sqrt{x^2-2x-3}=\sqrt{ax-7}$ имеет единственное решение.

Решение. По смыслу задания запишем систему:

$$\begin{cases} x^2-2x-3=ax-7 \\ x^2-2x-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax=x^2-2x+4 \\ \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{x^2-2x+4}{x} \\ \left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $a(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x}$, где $x\neq 0$;

$a'(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2}$; $a'(x)=0$, если $x=\pm 2$.

Знак $a'(x)$	+		-		-		+	
		-2		0		2		x
Поведение $a(x)$	$\uparrow$	max	$\downarrow$	разрыв	$\downarrow$	min	$\uparrow$	

$a(-2)=-6$; $a(2)=2$.

Построим график функции $a(x)=\dfrac{x^2-2x+4}{x}$ или $a(x)=x-2+\dfrac{4}{x}$,

где $x\neq 0$ и $\left[\begin{array}{l} x\le -1 \\ x\ge 3 \end{array}\right.$.

Заметим, что $a(-1)=-7,\ \ a(3)=2\dfrac{1}{3}$.

Асимптоты графика: $x=0$ - <u>вертикальная;</u>

$a=x-2$ <u>- наклонная</u>.

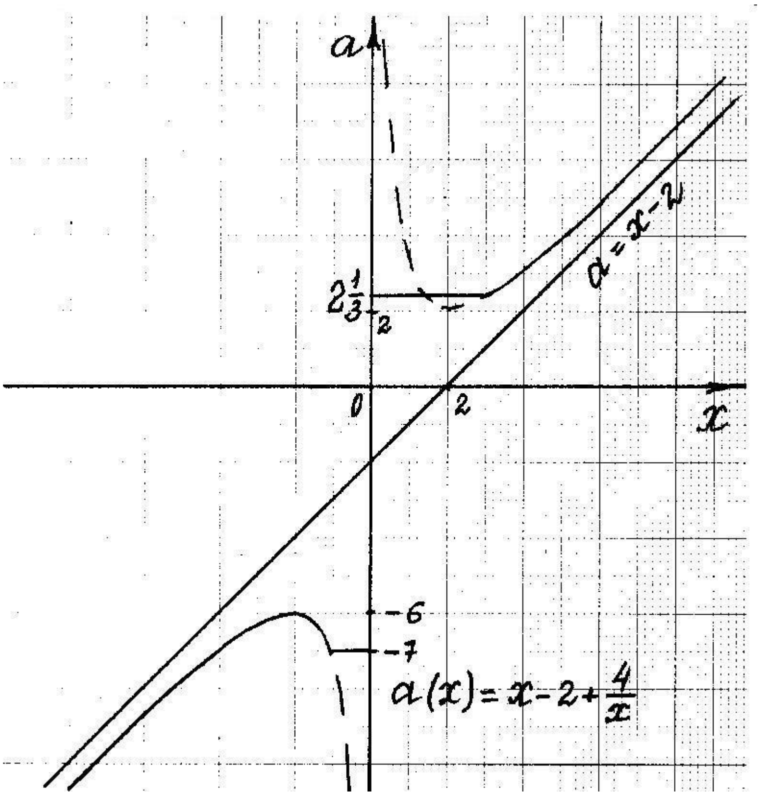

Рис.4

Очевидно, что прямая a=*const* будет пересекать график функции $a(x) = x - 2 + \dfrac{4}{x}$ в единственной точке, если $\left[\begin{array}{l} a = -6 \\ a < -7 \\ a \geq 2\dfrac{1}{3} \end{array}\right.$, значит, уравнение $\sqrt{x^2 - 2x - 3} = \sqrt{ax - 7}$ имеет единственное решение, при $a = -6$; $a < -7$; $a \geq 2\dfrac{1}{3}$.

Ответ: при $a = -6$**;** $a < -7$**;** $a \geq 2\dfrac{1}{3}$**.**

Пример 5. При каких значениях а система уравнений $\begin{cases} \log_2 (x-2) + 2 = 2\log_2 y \\ y + 8a = 2ax + 3 \end{cases}$ имеет два решения?

Решение. Учтём, что $\begin{cases} x > 2, \\ y > 0. \end{cases}$

Перепишем первое уравнение системы:

$$\log_2 4(x-2) = 2\log_2 y \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 4(x-2) = \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 \sqrt{4(x-2} = \log_2 y \Leftrightarrow y = 2\sqrt{x-2}$$

Исходная система принимает вид $\begin{cases} y = 2\sqrt{x-2} \\ y-3 = 2ax-8a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-2} \\ y-3 = 2a(x-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-2} \\ a = \dfrac{y-3}{2(x-4)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt{x-2} \\ a = \dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{2(x-4)} \end{cases}$, где $x \neq 4$ и $\begin{cases} x > 2, \\ y > 0. \end{cases}$

Рассмотрим функцию $a(x) = \dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{2(x-4)}$, где $\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 4. \end{cases}$

$$a'(x) = \frac{\dfrac{2x-8}{\sqrt{x-2}} - 4\sqrt{x-2} + 6}{4(x-4)^2} = \frac{2x-8-4x+8+6\sqrt{x-2}}{4\sqrt{x-2}(x-4)^2} = \frac{6\sqrt{x-2}-2x}{4\sqrt{x-2}(x-4)^2} = \frac{3\sqrt{x-2}-x}{2\sqrt{x-2}(x-4)^2}$$

и $a'(x) = 0$, если $3\sqrt{x-2} - x = 0,\ 3\sqrt{x-2} = x,\ x^2 - 9x + 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = 6 \end{array}\right.$, что

удовлетворяет условию $\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Покажем знаки производной $a'(x)$ и поведение функции $a(x)$ при всех значениях x из промежутков $(2;4)$, $(4;+\infty)$.Заметим, что $a'(2{,}5) < 0$, $a'(3{,}5) > 0$ и $a'(4{,}5) > 0$, $a'(7) < 0$.

Знак $a'(x)$		-		+		+		-	
Поведение $a(x)$	2	$\downarrow$	3 min	$\uparrow$	4 разрыв	$\uparrow$	6 max	$\downarrow$	x

Заметим, что $a(3) = \dfrac{1}{2}$; $a(6) = \dfrac{1}{4}$.

Найдём нули функции: $a(x) = 0$, если $2\sqrt{x-2} - 3 = 0$, где $x = 4{,}25$, что удовлетворяет условию $\begin{cases} x > 2, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Оказалось, что у функции $a(x)$ единственный нуль; тогда, очевидно, что при $x \to +\infty$ $a(x) \to 0$.

Вертикальные асимптоты графика функции - $x = 2$ и $x = 4$.

Построим график функции $a(x) = \dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{2(x-4)}$.

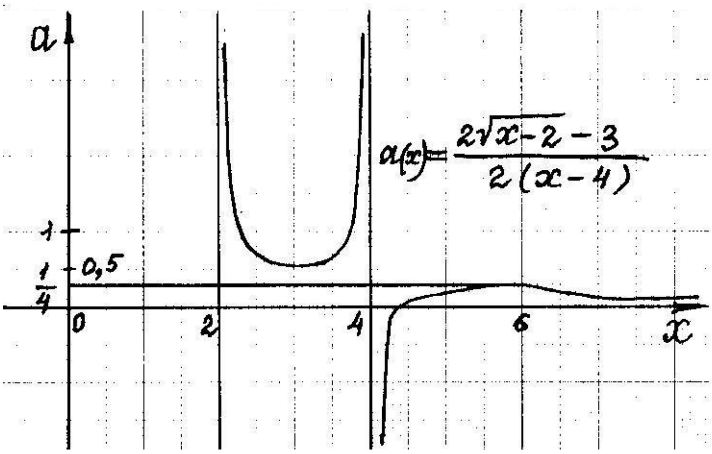

Рис.5

Прямая *a=const* будет пересекать график функции $a(x) = \dfrac{2\sqrt{x-2}-3}{2(x-4)}$ в двух точках, если $a > 0{,}5$; $0 < a < \dfrac{1}{4}$, значит, система уравнений $\begin{cases} \log_2(x-2)+2 = 2\log_2 y \\ y + 8a = 2ax + 3 \end{cases}$ имеет два решения, при $a > 0{,}5$; $0 < a < \dfrac{1}{4}$.

Ответ: при $a > 0{,}5$**;** $0 < a < \dfrac{1}{4}$**.**

Пример 6.При каких значениях а уравнение $\sin x - a = \sqrt{\sin x + \dfrac{1}{3}}$ имеет решение?

Решение. Перепишем уравнение: $a = \sin x - \sqrt{\sin x + \dfrac{1}{3}}$.

Сделаем замену, пусть $\sin x = t$, где $\begin{cases} t + \dfrac{1}{3} \ge 0 \\ -1 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge -\dfrac{1}{3} \\ -1 \le t \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3} \le t \le 1$, тогда

$a = t - \sqrt{t + \dfrac{1}{3}}$.

Рассмотрим функцию $a(t) = t - \sqrt{t + \dfrac{1}{3}}$, где $-\dfrac{1}{3} \le t \le 1$ и найдём множество её значений.

1. $a(-\dfrac{1}{3}) = -\dfrac{1}{3} - \sqrt{-\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}} = -\dfrac{1}{3} \approx -0{,}33$;

2. $a(1) = 1 - \sqrt{1 + \dfrac{1}{3}} = 1 + \sqrt{\dfrac{4}{3}} = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} \approx -0{,}15$;

3. $a'(t)=1-\dfrac{1}{2\sqrt{t+\frac{1}{3}}}=\dfrac{2\sqrt{t+\frac{1}{3}}-1}{2\sqrt{t+\frac{1}{3}}}$; $a'(t)=0$, $2\sqrt{t+\frac{1}{3}}-1=0$, $t+\frac{1}{3}=\frac{1}{4}$, $t=-\frac{1}{12}$,

что удовлетворяет условию $-\frac{1}{3}\le t\le 1$.

4. $a(-\frac{1}{12})=-\frac{1}{12}-\sqrt{-\frac{1}{12}+\frac{1}{3}}=-\frac{1}{12}-\frac{1}{2}=-\frac{7}{12}\approx -0{,}58$.

Наибольшее значение функции $a(t)=t-\sqrt{t+\frac{1}{3}}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{3};1\right]$ равно $1-\frac{2}{\sqrt{3}}$, наименьшее значение функции равно $-\frac{7}{12}$.

Значит, уравнение $\sin x-a=\sqrt{\sin x+\frac{1}{3}}$ имеет решение при всех $-\frac{7}{12}\le a\le 1-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ответ: при $-\frac{7}{12}\le a\le 1-\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Покажем применение производной при решении других примеров с параметром.

Пример 7. Найти все значения параметра а, при которых графики функций $y=x^2-(3+\frac{3}{2}a)x+3a+3$ и $y=\dfrac{1-a^2}{x}$ имеют ровно две общие точки.

Решение. По смыслу задания $x^2-(3+\frac{3}{2}a)x+3a+3=\dfrac{1-a^2}{x}$**,** где $x\neq 0$**,** тогда решаем уравнение $x^3-(3+\frac{3}{2}a)x^2+3ax+3x+a^2-1=0$ (1).

Обозначим: $f(x)=x^3-(3+\frac{3}{2}a)x^2+3ax+3x+a^2-1$.

По смыслу задания уравнение (1) должно иметь ровно два различных корня, тогда один из них должен иметь кратность 2, (например, x_1) и тогда $f(x)=(x-x_1)^2(x-x_2)$, откуда следует, что

$$f'(x)=2(x-x_1)(x-x_2)+(x-x_1)^2=(x-x_1)(2(x-x_2)+x-x_1)=(x-x_1)(3x-2x_2-x_1)$$

и при $x = x_1$ $f'(x) = 0$, т.е. x_1 - корень и уравнения $f(x) = 0$, и уравнения $f'(x) = 0$.

Для $f(x) = x^3 - (3 + \frac{3}{2}a)x^2 + 3ax + 3x + a^2 - 1$ найдём производную $f'(x)$.

$f'(x) = 3x^2 - 2(3 + \frac{3}{2}a)x + 3a + 3$.

Решаем уравнение $f'(x) = 0$, т.е. уравнение

$3x^2 - (6 + 3a)x + 3a + 3 = 0$, где $D = 36 + 36a + 9a^2 - 12(3a + 3) = 9a^2$, тогда либо

$x_1 = \frac{6 + 3a - 3a}{6} = 1$, либо $x_1 = \frac{6 + 3a + 3a}{6} = a + 1$.

1. Пусть $x_1 = 1$, тогда $f(1) = 0$, т.е. $1 - 3 - \frac{3}{2}a + 3a + 3 + a^2 - 1 = 0$, $a^2 + \frac{3}{2}a = 0$,

откуда $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a - -1{,}5 \end{array}\right.$.

- Если $a = 0$, то, подставив это значение в уравнение (1), получим уравнение $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$ или $(x - 1)^3 = 0$, где один корень $x = 1$.

- Если $a = -1{,}5$, то уравнение (1) принимает вид $x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{4} = 0$ или $4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 = 0$, где один из корней $x_1 = 1$.

- По схеме Горнера устанавливаем, что $4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(4x^2 + x - 5)$, значит, в уравнении $4x^3 - 3x^2 - 6x + 5 = 0$ корни равны 1 и $-\frac{5}{4}$.

Очевидно, что $f(x) = (x - 1)^2 (x + \frac{5}{4})$, т.е. **при** $a = -1{,}5$ **в уравнении (1) ровно 2 корня:** $x_1 = 1$**,** $x_2 = -\frac{5}{4}$**, а это означает, что графики функций** $y = x^2 - (3 + \frac{3}{2}a)x + 3a + 3$ **и** $y = \frac{1 - a^2}{x}$ **при** $a = -1{,}5$ **имеют ровно две общие точки с абсциссами** $x_1 = 1$ и $x_2 = -\frac{5}{4}$**.**

2. Пусть $x_1 = a+1$, тогда $f(x_1) = (a+1)^3 - (3+\frac{3}{2}a)(a^2+2a+1) + 3(a^2+2a+1) + a^2 - 1$, решаем уравнение $(a+1)^3 - (3+\frac{3}{2}a)(a^2+2a+1) + 3(a^2+2a+1) + a^2 - 1 = 0$

или $a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a^2 - 6a - 3 - 1{,}5a^3 - 3a^2 - 1{,}5a + 3a^2 + 6a + 3 + a^2 - 1 = 0$,

$-0{,}5a^3 + a^2 + 1{,}5a = 0$, $a(-0{,}5a^2 + a + 1{,}5) = 0$, где $a = 0$ либо $-0{,}5a^2 + a + 1{,}5 = 0$,

т.е. $a^2 - 2a - 3 = 0$, тогда $\left[\begin{array}{l} a = -1 \\ a = 3. \end{array}\right.$

- Если $a = 0$, то корень один $x = 1$ (см. записи выше).
- Если $a = -1$, то уравнение (1) принимает вид $x^3 - 1{,}5x^2 = 0$ или $x^2(x - 1{,}5) = 0$, где $\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1{,}5 \end{array}\right.$, т.е. $f(x) = x^2(x - 1{,}5)$, **а это означает, что графики функций** $y = x^2 - (3+\frac{3}{2}a)x + 3a + 3$ **и** $y = \frac{1-a^2}{x}$ **при** $a = -1$ **имеют ровно две общие точки с абсциссами** $x_1 = 0$ **и** $x_2 = 1{,}5$**.**
- Если $a = 3$ то уравнение (1) принимает вид $x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 8 = 0$, где по схеме Горнера устанавливаем, что

$x^3 - 7{,}5x^2 + 12x + 8 = (x-4)(x^2 - 3{,}5x - 2) = (x-4)^2(x - 0{,}5)$ и $f(x) = (x-4)^2(x-0{,}5)$,

а это означает, что графики функций $y = x^2 - (3+\frac{3}{2}a)x + 3a + 3$ **и** $y = \frac{1-a^2}{x}$ **при** $a = 3$ **имеют ровно две общие точки с абсциссами** $x_1 = 4$ **и** $x_2 = 0{,}5$**.**

Ответ: при $a = -1{,}5$**;** $a = -1$; $a = 3$ **графики функций** $y = x^2 - (3+\frac{3}{2}a)x + 3a + 3$ **и** $y = \frac{1-a^2}{x}$ **имеют ровно две общие точки.**

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите все значения параметра a при которых уравнение а) $\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt{ax-\frac{17}{4}}$; б) $\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{ax-6}$; в) $\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{ax-\frac{21}{4}}$ имеет единственное решение.

Ответ: а)при $a=4$**;** $>4\frac{1}{4}$**;** $a\le-2\frac{1}{8}$**; б)при** $a\ge3$**;** $a=-5$**;** $a<-6$**; в) при** $a\le-1\frac{3}{4}$**;** $a=5$**;** $a>5\frac{1}{4}$**.**

2. При каких значениях a система $\begin{cases}2\log_2 y-2=\log_2(x+2)\\2ax+5=y+8a\end{cases}$ имеет два решения?

Ответ: при $a>\frac{1}{4}$**;** $0<a<\frac{1}{6}$**.**

3. При каких значениях a система $\begin{cases}2\log_3 y=2+\log_3(x-1)\\y-3ax=5-6a\end{cases}$ имеет единственное решение?

Ответ: при $a=\frac{3}{2}$**;** $a\le0$**;** $a=\frac{1}{6}$**.**

4. При каких значениях параметра a уравнение а) $\sqrt{\cos x+\frac{1}{2}-\cos x=a}$; б) $\sqrt{\cos x+\frac{1}{4}}-a=\cos x$ имеет решение?

Ответ: а)при $a\in\left[\sqrt{1{,}5}-1;0{,}75\right]$**; б)при** $a\in\left[\frac{\sqrt{5}}{2}-1;\frac{1}{2}\right]$**.**

5. Найти все значения параметра a, при которых графики функций

а) $y=2x^2-3(a-2)x-12a$ и $y=\frac{a^2+10a}{x}$;

б) $y=x^2-3ax+6a-3$ и $y=\frac{2-a^2}{x}$;

в) $y=x^2-3(a+1)x+12a$ и $y=\frac{10a-2a^2}{x}$ имеют ровно две общие точки.

Ответ: а) при $a=-5$**;** $a=0$**;** $a=4$**; б)при** $a=-4$**;** $a=0$**;** $a=\frac{9}{4}$**; в)** $a=-2$**;** $a=0$**;** $a=\frac{5}{2}$**.**