

Графические приёмы при решении задач с параметрами (метод областей)

Взгляд на параметр как на равноправную переменную находит своё отражение в графических методах. В самом деле, поскольку параметр «равен в правах» с переменной, то ему, естественно, можно «выделить» и свою координатную ось. Таким образом, возникает координатная плоскость $(x; a)$. Отказ от традиционного выбора букв x и y для обозначения осей, определяет один из эффективнейших методов решения задач с параметрами – «метод областей».

Самые общие признаки, которые помогут узнавать задачи, подходящие под рассматриваемый метод:

- в задаче фигурирует лишь один параметр a и одна переменная x ; они конструируют некоторые аналитические выражения $F(x; a)$, $G(x; a)$ и т.д.;
- графики уравнений $F(x; a) = 0$, $G(x; a) = 0$ и т.д. в системе координат $(x; a)$ строятся несложно.

Процесс решения задач схематично выглядит так:

- строится графический образ;
- пересекается полученный график прямыми, перпендикулярными параметрической оси;
- «снимается» нужная информация.

Переходим к решению задач, к которым рекомендации более конкретны:

- получить равенство вида $a = f(x)$, выражая параметр через переменную;
- на плоскости $(x; a)$ строить график функции f .

Задача 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств
$$\begin{cases} x^2 + 6x + 7 + a \leq 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leq 4a \end{cases}$$
 образует на числовой прямой отрезок длины 1.

Решение. Перепишем исходную систему в таком виде
$$\begin{cases} a \leq -x^2 - 6x - 7, \\ a \geq \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Все решения этой системы (пары вида $(x; a)$) образуют некоторую область, ограниченную параболлами $a = -x^2 - 6x - 7$ и $a = \frac{1}{4}x^2 + x + \frac{7}{4}$ (рис 1).

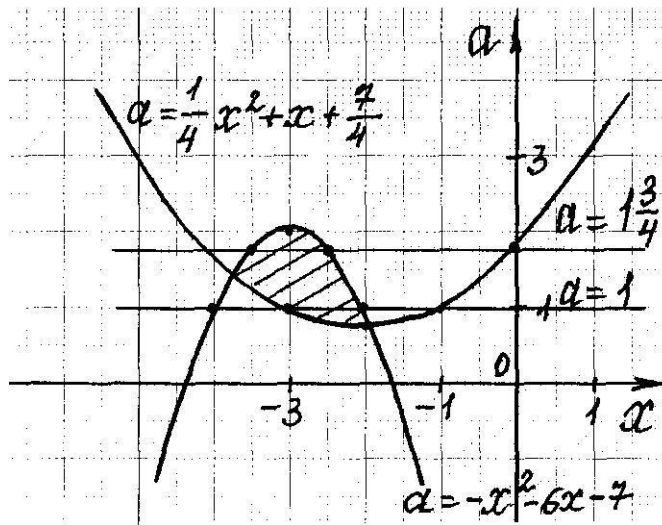


Рис. 1.

Очевидно, решением системы неравенств будет отрезок длины 1 при $a = 1$ и при $a = 1\frac{3}{4}$.

Ответ: $a = 1; a = 1\frac{3}{4}$.

Задача 2. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $\frac{25 - (a + 10)x}{x^2} < \frac{5a}{x^2} \left(\frac{5}{x} - 2 \right) - 1$ содержит число 6, а так же содержит два отрезка длиной 6, не имеющие общих точек.

Решение. По смыслу неравенства $x \neq 0$; перепишем неравенство, умножив обе его части на x^4 ($x^4 > 0$), получаем неравенство:

$$25x^2 - x^3(a + 10) < 5ax^2 \left(\frac{5}{x} - 2 \right) - x^4, \quad 25x^2 - 25ax + x^4 - ax^3 - 10x^3 + 10ax^2 < 0,$$

$$25x(x - a) + x^3(x - a) - 10x^2(x - a) < 0, \quad x(x - a)(x^2 - 10x + 25) < 0,$$

$$x(x - a)(x - 5)^2 < 0 \quad (1)$$

Неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ x - a < 0, \\ x \neq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ a > x, \\ x \neq 5. \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x < 0, \\ x - a > 0, \\ x \neq 5; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ a < x, \\ x \neq 5. \end{cases}$$

Покажем области, которые соответствуют этим системам (рис. 2).

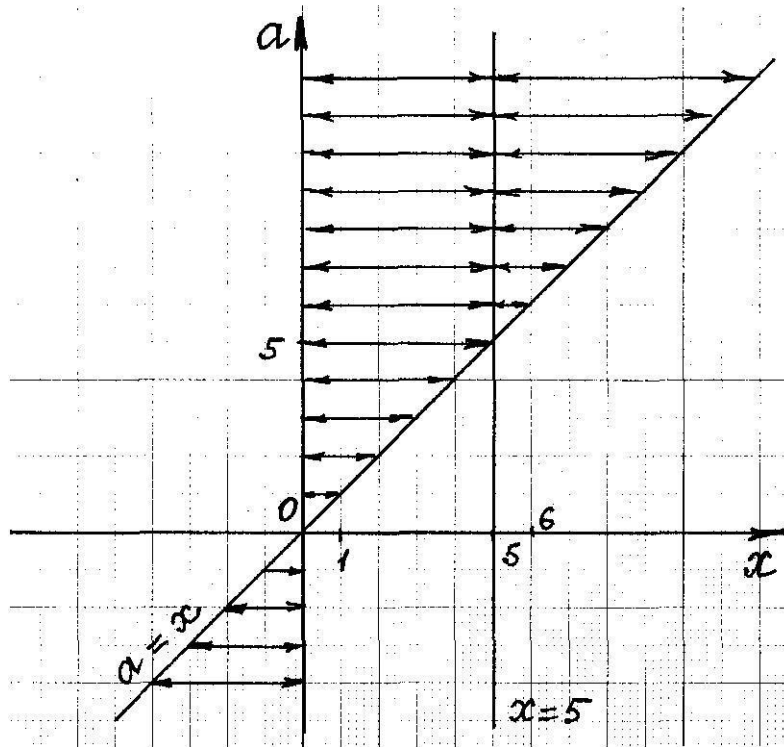


Рис. 2

Очевидно, интервал $(0;5)$ не может содержать отрезка длины 6. Значит, два непересекающихся отрезка длины 6 содержатся в интервале $(5;a)$. Это возможно при $a > 5 + 6 + 6$, т.е. при $a > 17$.

Ответ: $a \in (17; +\infty)$.

Задача 3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых множество решений неравенства $1 - \frac{a}{x} < \frac{8}{x} \left(1 - \frac{a+2}{x} + \frac{2a}{x^2}\right)$ содержит отрезок длиной 4 и при этом содержится в некотором отрезке длиной 7.

Решение. Проведём равносильные преобразования, учитывая, что $x \neq 0$ и $x^4 > 0$.

$$1 - \frac{a}{x} < \frac{8}{x} - \frac{8a+16}{x^2} + \frac{16a}{x^3}, \quad x^4 - ax^3 - 8x^3 + 8ax^2 + 16x^2 - 16ax < 0,$$

$$x^3(x-a) - 8x^2(x-a) + 16x(x-a) < 0, \quad x(x-a)(x^2 - 8x + 16) < 0,$$

$x(x-a)(x-4)^2 < 0$; последнее неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} x > 0, \\ x-a < 0, \\ x \neq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0, \\ a > x, \\ x \neq 4. \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x < 0, \\ x-a > 0, \\ x \neq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ a < x, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Покажем области, которые соответствуют этим системам (рис. 3).

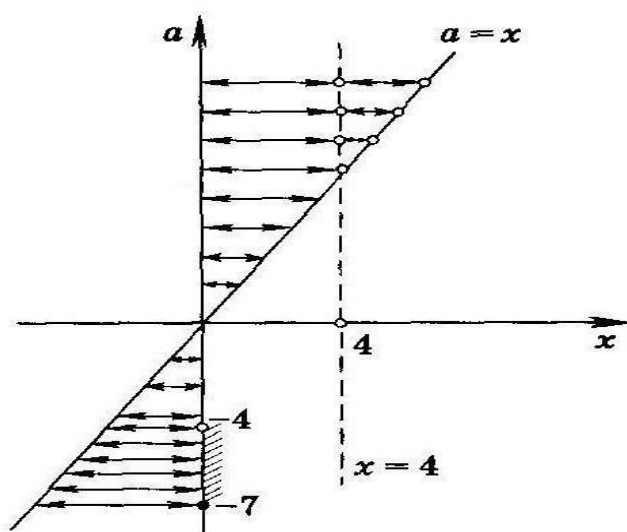


Рис. 3

1) При $0 \leq a < 4$ множество решений – это интервал $(0; a)$ длиной, меньшей 4. При $a \geq 4$ множество решений – это объединение двух интервалов $(0; 4) \cup (4; a)$. Содержать отрезок длиной 4 может только интервал $(4; a)$. Но тогда $a > 8$, и объединение $(0; 4) \cup (4; a)$ уже не содержится ни в каком отрезке длиной 7. Значит, такие a не удовлетворяют условию.

2) $a < 0$ множество решений – это интервал $(a; 0)$. Он содержит отрезок длиной 4, только если его длина больше 4, т.е. при $a < -4$. Он содержится в отрезке длиной 7, только если его длина не больше 7, т.е. при $-7 < a$, тогда $-7 \leq a < -4$.

Ответ: $[-7; -4)$.

Задача 4. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $\frac{9 - (a + 6)x}{x^2} < \frac{3a}{x^2} \left(\frac{3}{x} - 2 \right) - 1$ содержит число 4, а также содержит два непересекающихся отрезка длиной 4 каждый.

Решение. По условию $x \neq 0$. Домножим обе части неравенства на x^4 ($x^4 > 0$). Получим равносильное неравенство, в котором сгруппируем все члены в левой части и преобразуем её в произведение:

$$(9 - ax - 6x)x^2 < 3ax^2 \left(\frac{3}{x} - 2 \right) - x^4, \quad 9x^2 - ax^3 - 6x^3 - 9ax + 6ax^2 + x^4 < 0,$$

$$x^3(x - a) + 9x(x - a) - 6x^2(x - a) < 0, \quad x(x - a)(x - 3)^2 < 0.$$

Из последнего неравенства следует:

$$1) \begin{cases} x > 0 \\ x - a < 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ a > x \\ x \neq 3 \end{cases} \qquad 2) \begin{cases} x < 0 \\ x - a > 0 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ a < x \\ x \neq 3 \end{cases}.$$

Покажем области, которые соответствуют этим системам (рис. 4).

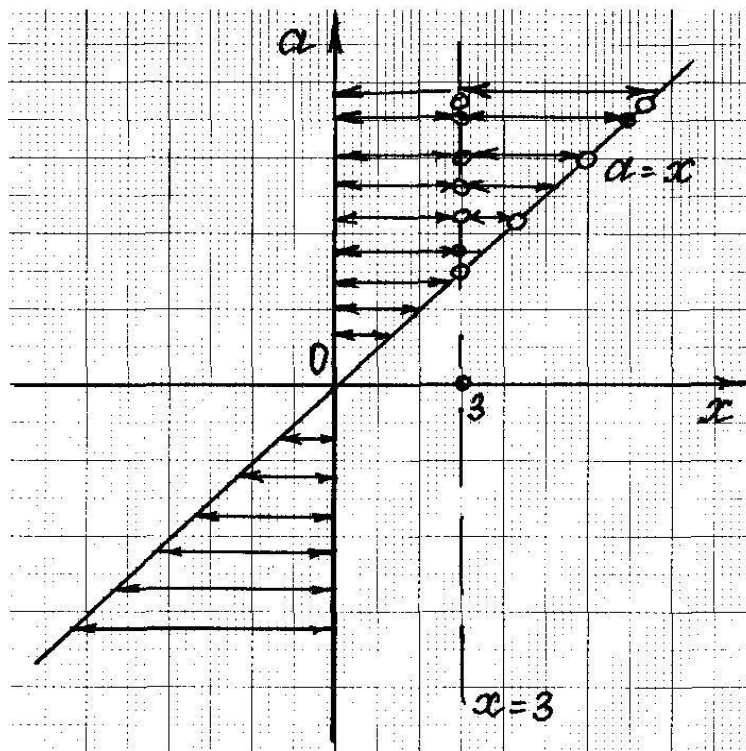


Рис. 4

а) При $0 \leq a \leq 3$ получаем интервал $(0; a)$, не содержащий числа 4. При $a < 0$ получаем интервал $(a; 0)$, также не содержащий числа 4.

б) При $a > 3$ получаем объединение $(0; 3) \cup (3; a)$ двух интервалов. Непересекающиеся отрезки длиной 4 могут располагаться только в интервале $(3; a)$. Это возможно только в том случае, если длина интервала $(3; a)$ больше 8, т. е. если $a > 11$. При таких a выполнено и другое условие: $4 \in (3; a)$.

Ответ: $(11; +\infty)$.

Задача 5. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $a^2 + 8a < \frac{4a^2}{x} - x(x - 2a - 4)$ содержит какой-нибудь отрезок длиной 2, но не содержит никакого отрезка длиной 3.

Решение. По смыслу задания $x \neq 0$, умножим обе части неравенства на x^2 ($x^2 > 0$), сгруппируем все члены в левой части неравенства и преобразуем её в произведение:

$$a^2 x^2 + 8a x^2 < 4a^2 x - x^3(x - 2a - 4), \quad a^2 x^2 + 8a x^2 - 4a^2 x + x^4 - 2a x^3 - 4x^3 < 0,$$

$xa^2(x-4) - 2ax^2(x-4) + x^3(x-4) < 0$, $x(x-4)(a-x)^2 < 0$. Из последнего неравенства следует:

$$1) \begin{cases} x > 0 \\ x - 4 < 0 \\ a \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 4 \\ a \neq x. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x < 0 \\ x - 4 > 0 \\ a \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 4 \\ a \neq x \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Покажем область, которая соответствует первой системе (рис. 5).

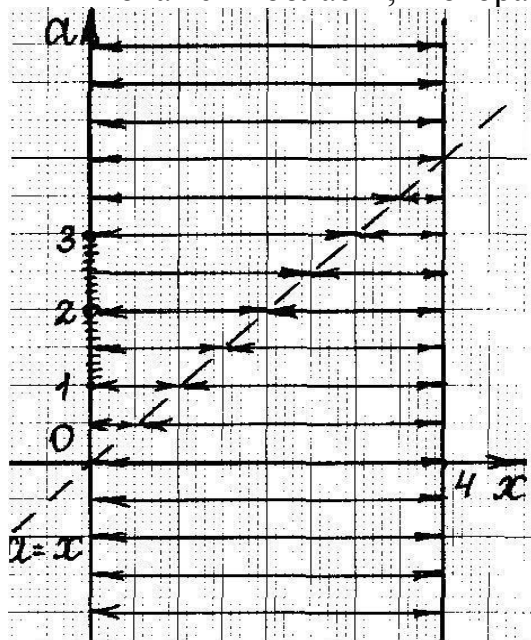


Рис. 5

Очевидно, что условие задачи выполняется, если $a \in [1;2) \cup (2;3]$.

Ответ: $[1;2) \cup (2;3]$.

Задача 6. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $1 + \log_x \frac{x-3a}{3} \leq (2 \log_3(2a) - 1) \log_x 3$ содержится в некотором отрезке длиной 1 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 0,5.

Решение. 1). Укажем ОДЗ переменной и параметра: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x - 3a > 0 \\ 2a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a > 0. \end{cases}$

2). Перепишем неравенство в виде

$$1 + \log_x(x-3a) - \log_x 3 \leq \log_3(4a^2) \log_x 3 - \log_x 3, \quad 1 + \log_x(x-3a) \leq \log_3(4a^2) \log_x 3,$$

$$1 + \frac{\log_3(x-3a)}{\log_3 x} \leq \frac{\log_3(4a^2)}{\log_3 x}, \quad \frac{\log_3 x + \log_3(x-3a)}{\log_3 x} \leq \frac{\log_3(4a^2)}{\log_3 x},$$

$$\frac{\log_3 x(x-3a)}{\log_3 x} \leq \frac{\log_3 (4a^2)}{\log_3 x} \quad (1).$$
 Неравенство (1) равносильно совокупности двух систем:

$$1) \begin{cases} 0 < x < 1 \\ \log_3 x(x-3a) \geq \log_3 (4a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x(x-3a) \geq 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 - 3ax - 4a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ (x+a)(x-4a) \geq 0. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x > 1 \\ \log_3 x(x-3a) \leq \log_3 (4a^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x(x-3a) \leq 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 3ax - 4a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ (x+a)(x-4a) \leq 0. \end{cases}$$

С учётом ОДЗ решения систем выглядят так:

$$1) \quad \text{а)} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0 < x < 1 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a > 0 \\ x+a \geq 0 \\ x-4a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ a > 0 \\ a \geq -x \\ a < \frac{1}{3}x \\ a \leq \frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ a > 0 \\ a \leq \frac{1}{4}x. \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ 0 < x < 1 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a > 0 \\ x+a \leq 0 \\ x-4a \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ a > 0 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a \leq -x \\ a \geq \frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset$$

Покажем область, соответствующую системе а) (рис. 6).

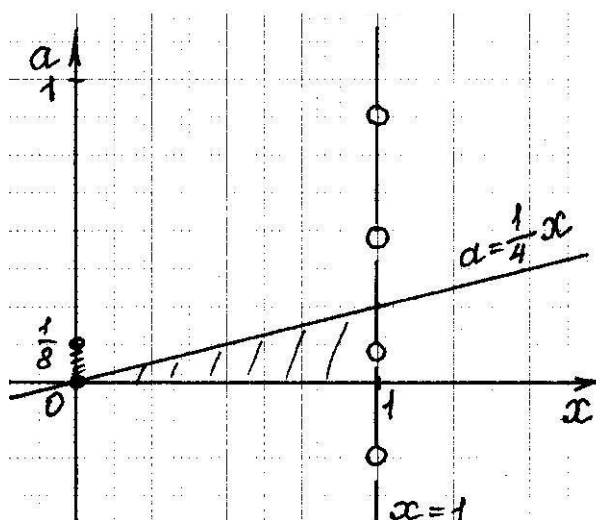


Рис. 6

2)

$$\begin{aligned} \text{а) } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > 1 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a > 0 \\ x + a \geq 0 \\ x - 4a \leq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a > 0 \\ a \geq -x \\ a \geq \frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a \geq \frac{1}{4}x \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x > 1 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a > 0 \\ x + a \leq 0 \\ x - 4a \geq 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ a > 0 \\ a < \frac{1}{3}x \\ a \leq -x \\ a \leq \frac{1}{4}x \end{cases} \Leftrightarrow \emptyset \end{aligned}$$

Покажем область, соответствующую системе а) (рис. 7).

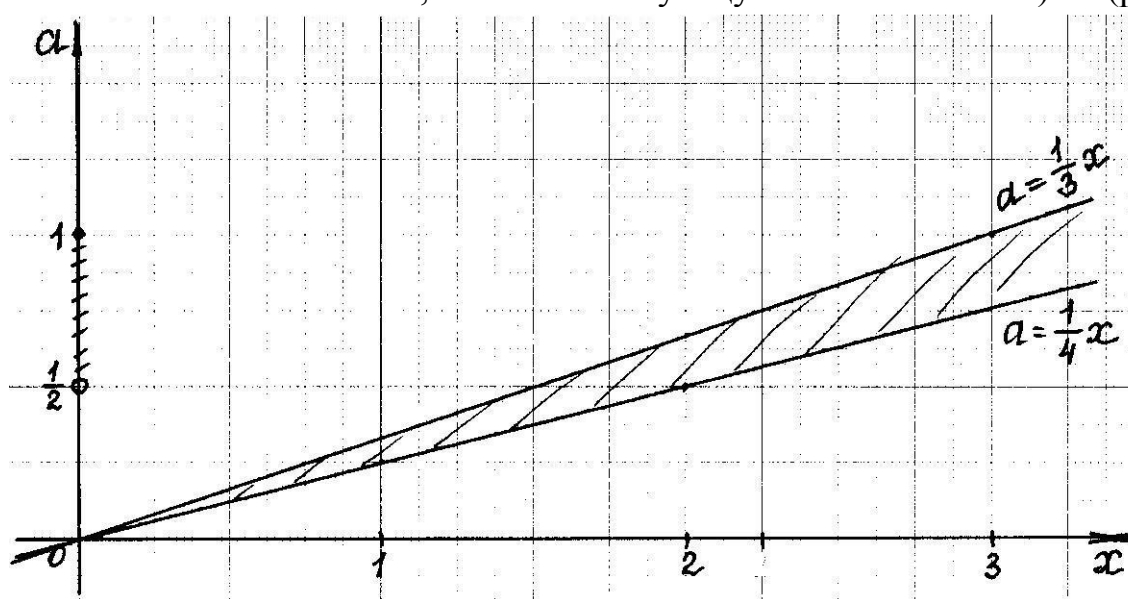


Рис. 7

Ответ: $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; 1\right]$.

Задача 7. Шесть чисел образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Первый, второй и четвертый члены этой прогрессии являются

решениями неравенства $\log_{0,5x-1} \left(\log_4 \frac{x-11}{x-8} \right) \geq 0$, а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений первого члена таких прогрессий.

Решение. I. Найдём все решения неравенства

$$\log_{0,5x-1} \left(\log_4 \frac{x-11}{x-8} \right) \geq 0$$

$$\text{а). ОДЗ: } \begin{cases} \frac{x-11}{x-8} > 0 \\ 0 < 0,5x-1 \neq 1 \\ \frac{x-11}{x-8} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-11}{x-8} > 1 \\ 1 < 0,5x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-3}{x-8} > 0 \\ 2 < x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-8 < 0 \\ 2 < x \neq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 \\ 2 < x \neq 4 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$x \in (2;4) \cup (4;8)$ (функция $y = \log_4 t$ возрастает на R_+).

б). На ОДЗ неравенство $\log_{0,5x-1}(\log_4 \frac{x-11}{x-8}) \geq 0$ равносильно неравенству

$$(0,5x-1-1)(\log_4 \frac{x-11}{x-8} - 1) \geq 0, \text{ т.е. } \begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ (0,5x-2)(\log_4 \frac{x-11}{x-8} - 1) \geq 0 \end{cases}, \text{ что даёт:}$$

$$1). \begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ 0,5x-2 \geq 0 \\ \log_4 \frac{x-11}{x-8} \geq \log_4 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ x \geq 4 \\ \frac{x-11-4x+32}{x-8} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ x \geq 4 \\ \frac{x-7}{x-8} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 7 \leq x < 8.$$

$$2). \begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ 0,5x-2 \leq 0 \\ \log_4 \frac{x-11}{x-8} \leq \log_4 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ x \leq 4 \\ \frac{x-11-4x+32}{x-8} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{ОДЗ} \\ x \geq 4 \\ \frac{x-7}{x-8} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x < 4.$$

Очевидно, решением неравенства $\log_{0,5x-1}(\log_4 \frac{x-11}{x-8}) \geq 0$ служит множество значений $x \in (2;4) \cup [7;8)$.

II. Проиллюстрируем вторую часть задачи о членах возрастающей арифметической прогрессии рисунком (a - первый член, $a+d$ - второй и т.д.)

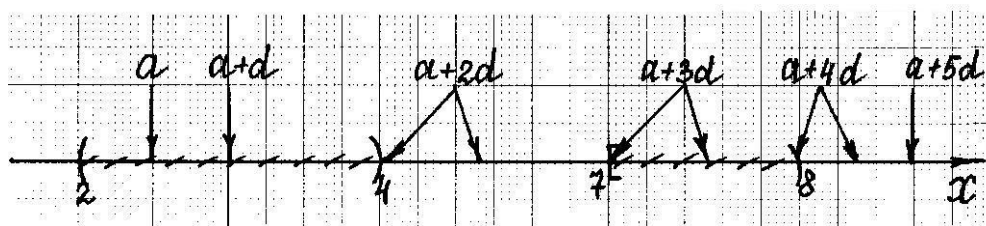


Рис. 8

Очевидно, что одновременно должны выполняться условия:

$$2 < a < 4$$

$$2 < a + d < 4$$

$$4 \leq a + 2d < 7$$

$$7 \leq a + 3d < 8$$

$$a + 4d \geq 8$$

Перепишем эти условия в виде системы неравенств:

$$\begin{cases} 2 < a < 4 \\ a + d > 2 \\ a + d < 4 \\ a + 2d \geq 4 \\ a + 2d < 7 \\ a + 3d \geq 7 \\ a + 3d < 8 \\ a + 4d \geq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < a < 4 \\ a > 2 - d \\ a < 4 - d \\ a \geq 4 - 2d \\ a < 7 - 2d \\ a \geq 7 - 3d \\ a < 8 - 3d \\ a \geq 8 - 4d \end{cases}$$

Систему этих линейных неравенств решим графическим способом. Построим прямые $a=2$ и $a=4$, а также прямые $a_1=2-d$, $a_2=4-d$, $a_3=4-2d$, $a_4=7-2d$, $a_5=7-3d$, $a_6=8-3d$, $a_7=8-4d$.

Все решения этой системы образуют область, показанную штриховкой на рисунке.

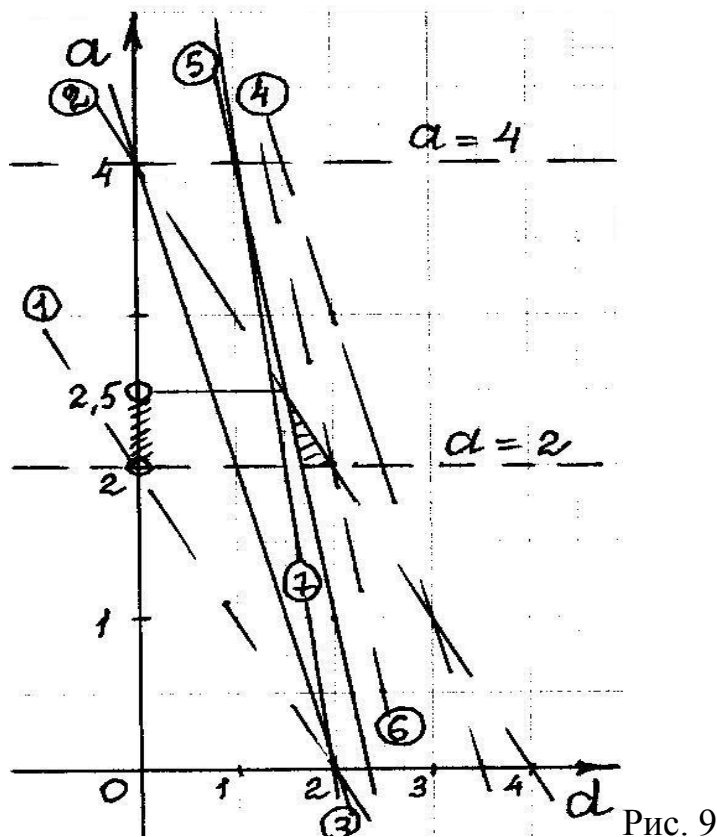


Рис. 9

Ответ: возможные значения первого члена $a \in (2; 2,5)$.

Задача 8. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 - |x-a| - |x-1| + 3 \geq 0$ выполняется при всех x ?

Решение. 1). Раскроем модули с учётом знака подмодульного выражения: $|x-a| = \begin{cases} x-a, & x-a \geq 0 \\ a-x, & x-a < 0; \end{cases} \quad |x-1| = \begin{cases} x-1, & x-1 \geq 0 \\ 1-x, & x-1 < 0. \end{cases}$

2). Запишем все системы получившихся неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} x-a \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2 - x + a - x + 1 + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \\ x \geq 1 \\ a \geq -x^2 + 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \\ x \geq 1 \\ a \geq -(x-1)^2 - 3. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x-a < 0 \\ x-1 \geq 0 \\ x^2 + x - a - x + 1 + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > x \\ x \geq 1 \\ a \leq x^2 + 4. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x-a \geq 0 \\ x-1 < 0 \\ x^2 - x + a + x - 1 + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x \\ x < 1 \\ a \geq -x^2 - 2. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x-a < 0 \\ x-1 < 0 \\ x^2 + x - a + x - 1 + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > x \\ x < 1 \\ a \leq x^2 + 2x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > x \\ x < 1 \\ a \leq (x+1)^2 + 1. \end{cases}$$

3). Покажем множество точек, удовлетворяющих каждой системе неравенств (рис. 10).

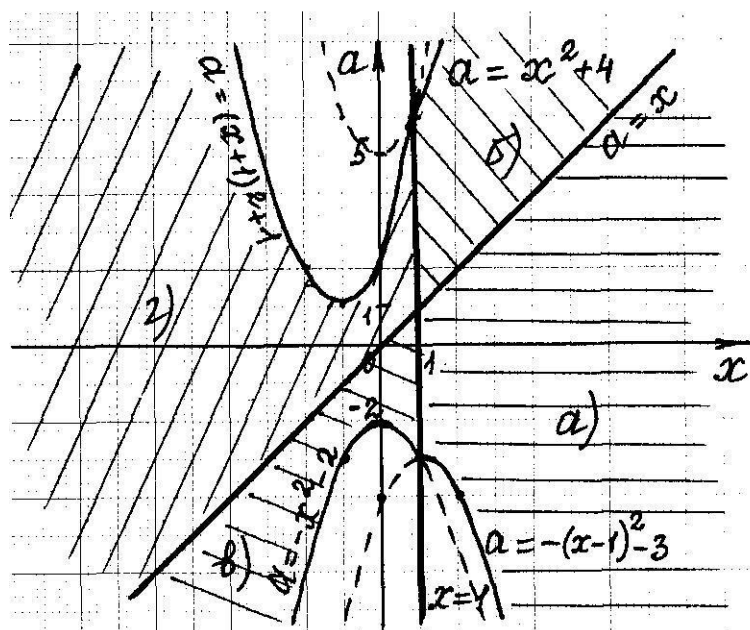


Рис. 10

4). Объединяя все области, показанные на рисунке штриховкой, можно заметить, что неравенству $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 \geq 0$ не удовлетворяют точки $(x; a)$, лежащие внутри парабол.

На рисунке видно, что при любом значении параметра a можно найти область, где лежат точки, координаты которых удовлетворяют исходному неравенству. Неравенство $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 \geq 0$ выполняется при всех x , если $a \in [-2; 1]$.

Ответ: при $a \in [-2; 1]$.

Рассмотренный пример представляет собой «открытую задачу» - можно рассмотреть целый класс задач, не изменяя рассмотренное в примере выражение $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3$, в которых технические трудности построения графиков уже преодолены.

Задача 9. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 = 0$ не имеет решений?

Ответ: при $a \in (-2; 1)$.

Задача 10. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 = 0$ имеет два решения? Запишите оба найденных решения.

Ответ: $a < -3$, тогда $x_1 = -\sqrt{-a-2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{-a-3}$;
 $-3 \leq a < -2$, тогда $x = \pm\sqrt{-a-2}$;
 $1 < a \leq 5$, тогда $x = -1 \pm \sqrt{a-1}$;
 $a > 5$, тогда $x_1 = -1 - \sqrt{a-1}$, $x_2 = \sqrt{a-4}$.

Задача 11. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 = 0$ имеет один корень? Найдите этот корень.

Ответ: при $a = -2$ $x = 0$; при $a = 1$ $x = -1$.

Задача 12. Решите неравенство $x^2 - |x - a| - |x - 1| + 3 < 0$. («Работают» точки, лежащие внутри парабол).

Ответ: $a < -3$, $x \in (-\sqrt{-a-2}; 1 + \sqrt{-a-3})$;
 $a \in [-3; -2]$, $x \in (-\sqrt{-a-2}; \sqrt{-a-2})$;
 $a \in (-2; 1)$, решений нет;
 $a \in [1; 5]$, $x \in (-1 - \sqrt{a-1}; -1 + \sqrt{a-1})$;
 $a > 5$, $x \in (-1 - \sqrt{a-1}; \sqrt{a-4})$.

Задача 13. При каких значениях параметра a площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием $|2x + y| + |x - y + 3| \leq a$, равна 24?

Решение. 1) $a < 0$, тогда такой фигуры не существует.

2) $a = 0$ т. е. $|2x + y| + |x - y + 3| = 0$, что возможно при $\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x + 2x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ тогда эта фигура – точка $(-1; 2)$.

3) $a > 0$. Выясним, какую фигуру задаёт множество точек, удовлетворяющих условию задачи.

Заметим, что $|2x + y| = \begin{cases} 2x + y; 2x + y \geq 0, \\ -2x - y; 2x + y < 0; \end{cases}$

$|x - y + 3| = \begin{cases} x - y + 3; x - y + 3 \geq 0, \\ y - x - 3; x - y + 3 < 0. \end{cases}$

Получаем системы неравенств:

$$\text{а). } \begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ 2x + y + x - y + 3 \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2x \\ y \leq x + 3 \\ x \leq \frac{a - 3}{3}. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + y \geq 0 \\ x - y + 3 < 0 \\ 2x + y + y - x - 3 \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -2x \\ y > x + 3 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + \frac{a + 3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x + y < 0 \\ x - y + 3 \geq 0 \\ -2x - y + x - y + 3 \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -2x \\ y \leq x + 3 \\ y \geq -\frac{1}{2}x - \frac{a - 3}{2}. \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x + y < 0 \\ x - y + 3 < 0 \\ -2x - y - x + y - 3 \leq a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -2x \\ y > x + 3 \\ x \geq -\frac{a + 3}{3}. \end{cases}$$

В плоскости xOy покажем множество точек, удовлетворяющих, каждой системе неравенств (см. рис. 11).

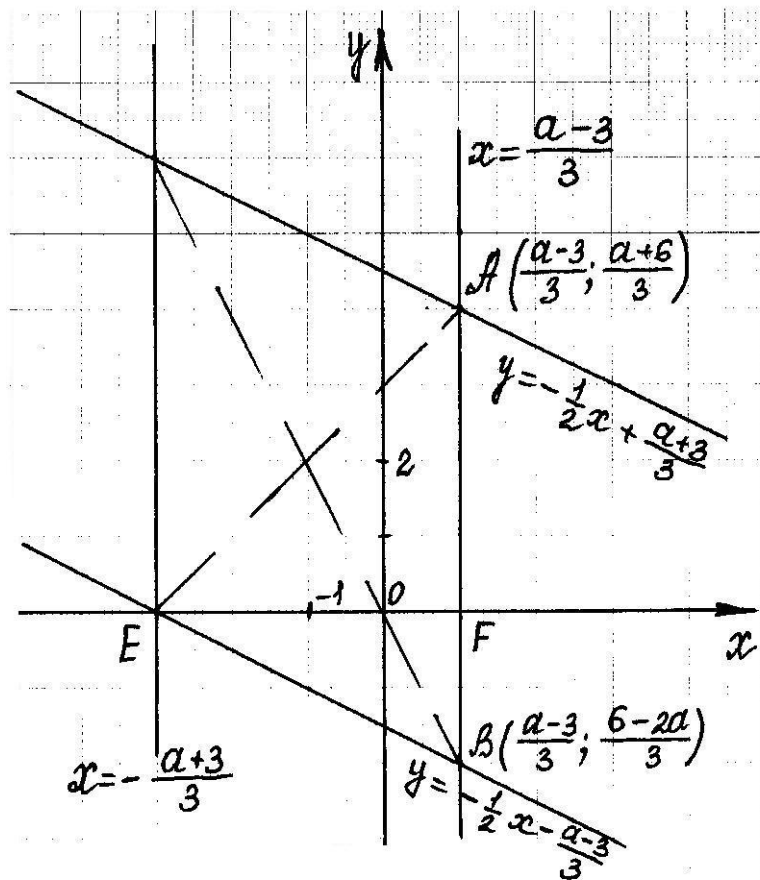


Рис. 11

Оказалось, что при $a > 0$ заданное множество – параллелограмм с центром в точке $(x = -1, y = 2)$ и сторонами, параллельными прямым $x = 0$ и $x + 2y = 0$, которому соответствует площадь, равная 24.

$$4) S = AB \cdot EF; AB = \frac{a+6}{3} - \frac{6-2a}{3} = a; EF = \frac{a-3}{3} + \frac{a+3}{3} = \frac{2a}{3}; S = 24, \text{ тогда}$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ \frac{2a}{3} \cdot a = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow a = 6.$$

Ответ: при $a = 6$.

Надеюсь, что разобранные задачи достаточно убедительно демонстрируют эффективность предложенного метода. Однако, к сожалению, сфера применения этого метода ограничена трудностями, с которыми можно столкнуться при построении графического образа.

Задания для самостоятельного решения.

Задача 1. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2 - 2x \leq a - 1, \\ x^2 - 4x \leq 1 - 4a \end{cases}$ образует на числовой прямой отрезок длины 1.

Ответ: $a = \frac{1}{4}; a = 1.$

Задача 2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств $\begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq a, \\ x^2 - 2x \leq 3 - 6a \end{cases}$ имеет единственное решение.

Ответ: $a \in \{0; 1\}$

Задача 3. Найдите все значения параметра a , при которых в множестве решений неравенства $x(x - 2a - 6) + a^2 < \frac{6a^2}{x} - 12a$ можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые **не имеют** общих точек.

Ответ: $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty).$

Задача 4. Найдите все значения параметра a , при которых множество решений неравенства $2 + \frac{1}{x}(1 - x) < \frac{1}{x^2} + \frac{a}{x}$ содержится в некотором отрезке длиной 4 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 2.

Ответ: $a \in (3; 5].$

Задача 5. Семь чисел образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью d . Первый, второй и шестой члены этой прогрессии являются решениями неравенства $\log_{4-x-|x|}(16-x) \leq 2$, а остальные не являются решениями этого неравенства. Найдите множество всех возможных значений разности этой прогрессии.

Ответ: $-\frac{2}{5} < d < -\frac{3}{8}.$