Задания и решения для районных (городских) олимпиад по математике
2007-2008 учебный год

9 класс

1. Найдите наименьшее целое *x*, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{x}{2008} \geq \dfrac{2007}{x}$ **.**

Ответ. -2007.

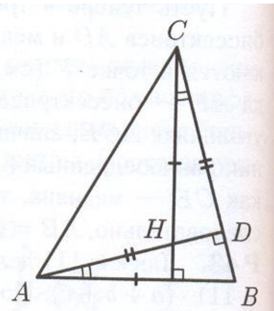
2. Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ **(**$a, b, c - \textit{целые}, c - \textit{нечетное}$**) имеет целые корни. Может ли** $P(2007)$ **быть нечетным числом?**

Ответ. Нет.

Пусть x_1 и x_2 - корни $P(x)$. Тогда по теореме Виета: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$, т.е. $x_1 \cdot x_2 \cdot a = c$. По условию c – нечетное; x_1, x_2, a - целые. Отсюда следует, что x_1, x_2, a - нечетные. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, то есть $b = -(x_1 + x_2) \cdot a$, т.е. b – четное число. Тогда $P(2007) = a \cdot 2007^2 + b \cdot 2007 + c$ - сумма двух нечетных и одного четного числа, т.е. четно.

3. Высоты треугольника ABC **пересекаются в точке** H**. Известно, что** $AB = CH$**. Найдите угол** ACB**.**

Ответ. 45^0



Пусть D - основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC (см. рис.). Углы HCB и DAB равны как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $\Delta CHD = \Delta ABC$ (по гипотенузе и острому углу). Поэтому $CD=AD$, т.е. ΔACD - равнобедренный и прямоугольный, следовательно $\angle ACB = 45^0$.

4. Квадрат со стороной 10 разделен прямыми, параллельными его сторонами, на единичные квадратики. Первоначально в левом нижнем квадратике стоит фишка. Двое школьников играют в такую игру. Ходят по очереди. За ход разрешается передвинуть фишку на любое количество квадратиков вверх или вправо. Школьник, который не может сделать ход, проигрывает. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

Ответ. Выигрывает второй школьник.

Его стратегия такова: в любой ход начинающего он ставит фишку на клетку, расположенную на диагонали, идущей из левого нижнего угла квадрата в правый верхний.

5. На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие 2 книги по белой магии не стоят через 13 книг (т.е. между ними не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

Ответ. 336

Разобьём книги на цепочки книг, идущих через 13: 1-я, 15-я, 29-я,…; 2-я, 16-я, …;…; 14-я, 28-я, … . Из того, что 666=$14\cdot 47+8$ следует, что мы получим 8 цепочек по 48 книг и 6 по 47 книг. В каждой из цепочек, по условию, книги по белой магии не могут быть соседними. Значит, в любой цепочке длины 48 их наибольшее количество равно 24, и в цепочке длины 47 их также может быть 24 (цепочка начинается и заканчивается такой книгой). Всего: $14\cdot 24=336$ книг.

10 класс

1. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy(x+y)=30; \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$$

Ответ: (3;2); (2;3).

Умножив первое уравнение на 3 и сложить со вторым.

2. Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону).

Решение. Нельзя. Предположим, что мы можем поменять цвет всех клеток. Рассмотрим клетку Х, которую мы перекрашиваем последней. К моменту перекрашивания клетки Х все остальные клетки должны были изменить свой цвет на противоположный. Значит в этот момент все соседние с Х клетки – одного с ней цвета, и, следовательно, перекрасить Х нельзя.

3. Докажите, что если p – простое число (p>3), то число p^2-1 делится на 24.

Решение.

Т.к. p –нечетно, то (p-1) и (p +1) - два последовательных четных числа, одно из них делится на 2, другое на $-y$, значит $p^2-1=(p-1)(p+1)$ делится на 8.

Очевидно, что $(p-1)(p+1)$ делится на 3, но p – простое и p>3, значит $(p-1)(p+1)$ делится на 3. Значит: $p^2-1=(p-1)(p+1)$ делится на 24.

4. Парабола $y=x^2-3ax+4a+1$ пересекает оси координат в трех точках. Через эти точки проведена окружность. При каких значениях a радиус этой окружности меньше 32?

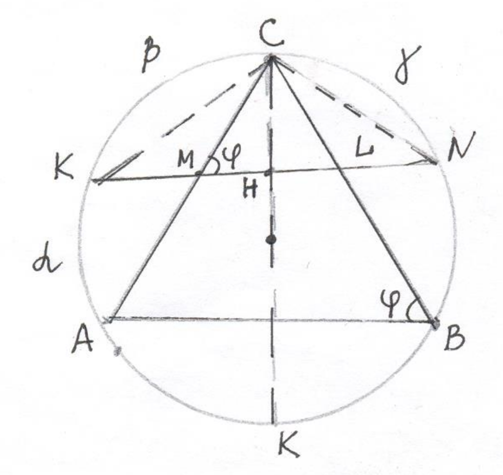
Решение. Пусть A и B точки пересечения параболы с осью OX, C – точка ее пересечения с осью OY, D – точка пересечения окружности с осью OY. Тогда $A(x_1,0), B(x_2,0), C(0,4a+1), D(0,d)$, где x_1, x_2 - корни трехчлена $x^2-3ax+4a+1$. Так как $OA\cdot OB=OC\cdot OD$ или $x_1\cdot x_2=(4a+1)d$. Но по теореме Виета $x_1\cdot x_2=4a+1$, поэтому $d=1$. Пусть P – центр окружности, его координаты – это соответствующие координаты середин отрезков AB и CD: $P(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{4a+1+1}{2})$ или $P(\frac{3a}{2};2a+1)$.

Поэтому радиус окружности $R=PD=\sqrt{\frac{9a^2}{4}+4a^2}=\frac{5}{2}|a|$. Решая систему неравенств $\frac{5}{2}|a|<32$, $9a^2-4(4a+1)>0$, $4a+1\neq 0$, получим:

$a\in(-\frac{64}{5};-\frac{1}{4})\cup(-\frac{1}{4};-\frac{2}{9})\cup(2;\frac{64}{5})$.

5. В треугольнике ABC с острым углом C длина AB равна 3, $\sin C = 0{,}6$. Хорда KN окружности, описанной около треугольника ABC, пересекает отрезки AC и BC в точках M и L соответственно. Известно, что угол ABC равен углу CML, площадь четырехугольника ABLM равна 2, а длина LM равна 1. Найти площадь треугольника KNC.

Решение.



1) Из треугольника ABC по теореме синусов находим радиус описанной окружности $2R = \dfrac{AB}{Sinc} = \dfrac{3}{0{,}6} = 5$, $R = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

2) $\Delta ABC \sim \Delta LMC \Rightarrow \dfrac{S_{LMC} + S_{ABLM}}{S_{LMC}} = \left(\dfrac{AB}{ML}\right)^2$, $\dfrac{S_{LMC} + 2}{S_{LMC}} = \left(\dfrac{3}{1}\right)^2 \Rightarrow S_{LMC} = \dfrac{1}{4}$.

3) Обозначим $\angle ABC = \angle CML = \varphi$, а дуги $\overset{\cup}{AK} = \alpha, \overset{\cup}{KC} = \beta, \overset{\cup}{CN} = \gamma$, тогда $\varphi = \alpha + \beta, \alpha = \alpha + \gamma$, т.е $\beta = \gamma$, значит ΔKCN - равнобедренный.

4) Тогда высота CH треугольника CKN (являющейся и медианой) будет частью диаметра CK.

Поэтому $CH = \dfrac{2S_{CML}}{ML} = \dfrac{2 \cdot \frac{1}{4}}{1} = \dfrac{1}{2}$ и $CH \cdot HK = KH \cdot HN, CH(2R - CH) = KH^2$,

$\dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{1}{2}\right) = KH^2$, $KH^2 = \dfrac{9}{4}, KH = \dfrac{3}{2}$, тогда $KN = 3$ и $S_{CKN} = \dfrac{1}{2} KN \cdot CH = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4}$.

Ответ. $S_{CKN} = \dfrac{3}{4}$

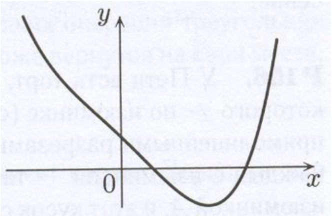
11 класс

1. Какое наименьшее количество чисел нужно исключить из набора 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 так, чтобы оставшиеся числа можно было разбить на две группы с одинаковым произведением чисел в группах? Приведите пример такого разбиения на группы.

Ответ. Нужно исключить три числа, например, 3, 7 и 11.

Подойдут группы, произведение чисел в которых равно 1440, например, {4, 5, 8, 9} и {2, 6, 10, 12}. Очевидно, что числа 7 и 11 должны быть исключены. Произведение остальных чисел есть $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2$, поэтому ещё необходимо исключить число 3 или 12.

2. Дан график функции $y = ax^4 - x^2 + bx + c$ (см. рис.). Найдите знаки чисел *a,b и c.*



Ответ. $a > 0, b < 0, c > 0$**.**

Пусть $x \to +\infty y \to +\infty$, значит, $a > 0$**.** График пересекает ось Oy в точке с положительной ординатой, значит, $c = y(0) > 0$. В этой же точке функция убывает, значит, $y'(0) < 0$. Но $y' = 4ax^3 - 2x + b$, т.е., $y'(0) = b < 0$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} tgz; \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} ctgz \end{cases}$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n_1; \frac{\pi}{4} + 2\pi m_1; \frac{\pi}{4} + \pi k_1\right), n_1, m_1, k_1 \in Z$ и $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n_2; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m_2; \frac{3\pi}{4} + \pi k_2\right), n_2, m_2, k_2 \in Z$ **.**

Очевидно, что $tgz \neq 0$, так как в противном случае $ctgz$ не определен. Пусть $tgz = a > 0$. Сложив оба уравнения, мы получим $\sin x + \sin y + \cos x + \cos y = \sqrt{2} tgz + \sqrt{2} ctgz$. Заметим, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$. Причем равенства достигаются только при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$. То есть левая часть не больше $2\sqrt{2}$. Рассмотрим теперь правую часть. Она $\left(a + \frac{1}{a}\right)\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$, причем равенство достигается при $tgz = ctgz = 1$, то есть при $z = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Таким образом, $(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) \leq 2\sqrt{2} \leq \sqrt{2}(tgz + ctgz)$. Уравнение имеет решения, только когда оба неравенства обращаются в равенства. Очевидно, что найденные *x, y* и *z* являются решением системы.

Пусть теперь $tgz < 0$. Аналогичным образом находим решения: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, z = \frac{3\pi}{4} + \pi k$.

4. **Площадь проекции некоторого параллелепипеда *P* на плоскость одной из его граней равна площади этой грани, площадь проекции *P* на плоскость другой грани в полтора раза больше площади этой грани, наконец, площадь проекции *P* на плоскость третьей грани в два раза больше площади этой грани. Найдите углы в этих гранях параллелепипеда *P*.**

Ответ. $I - 45^0$ и 135^0 **,** II и III – все углы по 90^0 **.**

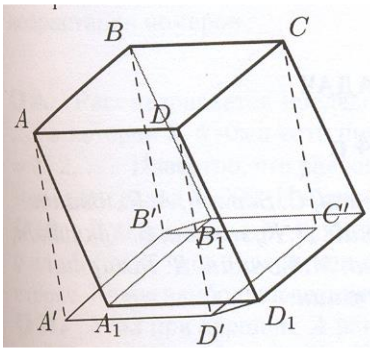


рис.1

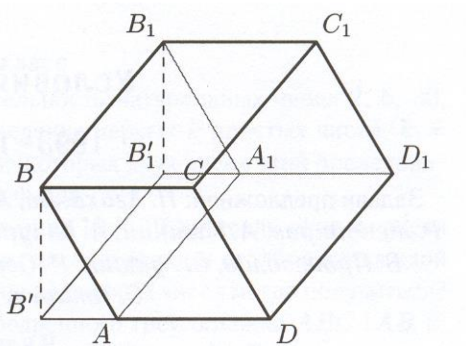


рис. 2

Пусть $A_1B_1C_1D_1$ - первая грань данного параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1ABCD$, $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ - проекция грани $ABCD$ на плоскость $A_1B_1C_1$ (см. рис. 1). Тогда из условия следует, что параллелограммы $A^{'}B^{'}C^{'}D^{'}$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают, значит, ребра AA_1, BA_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости $A_1B_1C_1$ и, следовательно, четыре другие грани – прямоугольники. Тогда площадь проекции *P* на плоскость A_1ADD_1 есть сумма площадей этой грани и проекции грани A_1ABB_1 (см. рис. 2), т.е. $S_2 = AD \cdot AA_1 + AB\cos\varphi \cdot AA_1$, где φ - угол между плоскостями граней A_1ABB_1 и A_1ADD_1. Отсюда $AD + AB\cos\varphi = 1{,}5AD$. Аналогично, $AB + AD\cos\varphi = 2AB$, т.е. $AB\cos\varphi = \dfrac{1}{2}AD$, $AD\cos\varphi = AB$, откуда $\cos^2\varphi = \dfrac{1}{2}$, $\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = 45^0$. Но φ - это угол D в грани $ABCD$.

5. **У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов, и при этом он использовал краски всех трех цветов?**

Ответ. 1530 способами.

Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую – одной из двух оставшихся. Третью – одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т.д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первую доску можно покрасить тремя способами, а вторую – двумя, далее покраска определяется однозначно). Итого 1536-6=1530 способов.