Управление образования и науки Белгородской области

Белгородский региональный институт повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов

Задания для районных (городских) олимпиад по математике
2005-2006 учебный год
9 класс

1. Найти сумму квадратов корней уравнения:
$$(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0.$$
2. Сумма трех натуральных чисел равна 2005. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?
3. Рассматриваются квадратичные функции $y=x^2+px+q$, у которых $p+\frac{1}{2}q=2005$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.
4. Можно ли расставить в клетках таблицы 10×10 числа -1, 0, 1так, чтобы все 20 сумм чисел в строках и столбцах были различны?
5. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle BMC=90^0+\angle BAC/2$ и прямая AM содержит центр окружности, описанной около треугольника BMC. Докажите, что M - центр вписанной окружности треугольника ABC.

Решение заданий для районных (городских) олимпиад по математике
2005-2006 учебный год
9 класс

1. Найти сумму квадратов корней уравнения:
$$(x^2+2x)^2-5(x^2+2x)+3=0.$$

Решение:

Представим данное уравнение в виде квадратного $t^2-5t+3=0$ (1), где $t=x^2+2x$.
Уравнение (1) имеет два положительных корня t_1 и t_2, причем $t_1+t_2=5$, а $t_1\cdot t_2=3$.
Для нахождения корней данного уравнение рассмотрим два равенства:
$$x^2+2x-t_1=0 \quad (2),$$
$$x^2+2x-t_2=0 \quad (3).$$
По теореме Виета $x_{11}+x_{12}=-2,\ x_{11}\cdot x_{12}=-t_1,$ и $x_{21}+x_{22}=-2,\ x_{21}\cdot x_{22}=-t_2$, где через x_{11},x_{12} обозначены корни уравнения (2), а через x_{21},x_{22} - уравнения (3).
Тогда $x_{11}^2+x_{12}^2=(x_{11}+x_{12})^2-2x_{11}x_{12}=4+2t_1,$ а $x_{21}^2+x_{22}^2=4+2t_2$.
$x_{11}^2+x_{12}^2+x_{21}^2+x_{22}^2=8+2(t_1+t_2)$.
Получается: $x_{11}^2+x_{12}^2+x_{21}^2+x_{22}^2=8+10=18$.

Ответ: сумма квадратов корней равна 18.

2. Сумма трех натуральных чисел равна 2005. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?

Решение:

Пусть $a\le b\le c$ - натуральные числа, сумма которых равна 2005, и $N=НОК(a,b,c)$. Заметим, что все числа равны быть не могут, так как 2005 не делится на 3. Тогда ясно, что $2a\le N, b\le N, c\le N$. Умножая первое неравенство на $1/2$ и складывая с остальными, получим $a+b+c\le(5/2)N$, т.е. $N\ge 2/5(a+b+c)=802$.

Если $a=2005/5=401, b=c=2a=802$, то $a+b+c=2005$ и $N=802$.

Ответ: 802.

3. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, у которых $p + \frac{1}{2}q = 2005$.

Докажите, что их графики проходят через одну точку.

Решение:

Рассмотрим значение трехчлена в точке $x_0 = 2$. Тогда $x_0^2 + px_0 + q = 4 + 2(p + \frac{q}{2}) = 4014$.

То есть графики всех трехчленов проходят через точку (2;4014).

4. Можно ли расставить в клетках таблицы 10×10 числа -1, 0, 1так, чтобы все 20 сумм чисел в строках и столбцах были различны?

Ответ: положительный. Доказательство проводится индукцией для всех таблиц вида $2n \times 2n$.

Более того, докажем что в таблице $2n \times 2n$ можно расставить числа -1,0,1 так, чтобы суммы чисел в строках и столбцах были различны и равны - $2n+1; -2n+2; \ldots 0,1, \ldots 2n-1, 2n$, т.е. ни одна строка и ни один столбец не будут состоять из сплошных -1.

1) при $n = 1$ годится расстановка:

1	0
1	-1

2) допустим, что можно нужным образом расставить числа в таблице $2n \times 2n$.

3) тогда таблицу $(2n+2) \times (2n+2)$ можно заполнить следующим образом:

$2n$

$2n$

<table>
<tr><td colspan="5" rowspan="5"></td><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>.
.
.
.
.</td><td>.
.
.
.
.</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>-1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>. . . . .</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>-1</td><td>-1</td><td>. . . . .</td><td>-1</td><td>-1</td><td>1</td><td>-1</td></tr>
</table>

где верхний левый угол $2n \times 2n$ заполняем согласно пункту 2, нижний правый угол 2×2 – согласно пункту 1, а остальные клетки как показано на рисунке.

5. Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle BMC = 90^0 + \angle BAC / 2$ и прямая AM содержит центр окружности, описанной около треугольника BMC. Докажите, что M - центр вписанной окружности треугольника ABC.

Решение:

Обозначим центр описанной около BMC окружности через O. Можно доказать, что $ABOC$ - вписанный четырехугольник. Отсюда нетрудно вывести, что AM - биссектриса угла BAC, а BM - биссектриса угла ABC.