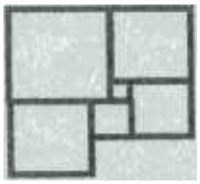
ОЛИМПИАДА 7-8 КЛАСС

1 ОТБОРОЧНЫЙ ТУР ПО МАТЕМАТИКЕ.

1. Натуральное число умножили на каждую из его цифр. Получилось 1995. Найдите исходное число.

2. Один сапфир и два топаза.
Ценней, чем изумруд, в три раза.
А семь сапфиров и топаз
Его ценнее в восемь раз.
Определить мы просим вас,
Сапфир ценнее иль топаз?

3. Фигура на рисунке составлена из квадратов. Найдите сторону левого нижнего квадрата, если сторона самого маленького из них равна 1.



4. По кругу расставлены цифры 1, 2, 3,..., 9 в произвольном порядке. Каждые три цифры, стоящие подряд по часовой стрелке, образуют трехзначное число. Найти сумму всех девяти таких чисел. Зависит ли она от порядка, в котором записаны цифры?

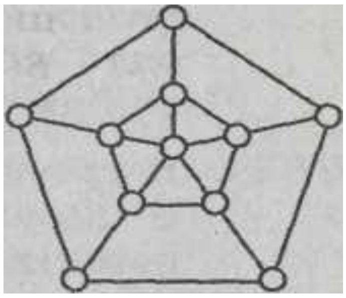
5. Два пирата играли на золотые монеты. Сначала первый проиграл половину своих монет (отдал второму), потом второй проиграл половину своих, потом снова первый проиграл половину своих. В результате у первого оказалось 15 монет, а у второго - 33. Сколько монет было у первого пирата до игры?

6. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскуток граничит только с белыми, а каждый белый - с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутков белого цвета?

7. За круглым столом сидят *n* физиков и *n* химиков, причем некоторые из них всегда говорят правду, а другие всегда врут. Известно, что количество химиков-лжецов равно количеству физиков-лжецов. На вопрос: «Кто ваш сосед справа?» все, кто сидит за столом, ответили: «Химик». Докажите, что *n* — четное.

ОЛИМПИАДА 7-8 КЛАСС

2 ОТБОРОЧНЫЙ ТУР ПО МАТЕМАТИКЕ.

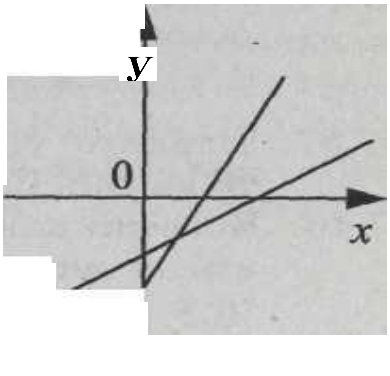


1. Можно ли расположить в кружочках на рисунке натуральные числа от 1 до 11 так, чтобы сумма трех чисел на каждом из пяти выходящих из центра отрезков равнялось одному и тому же числу *А,* а сумма пяти чисел в вершинах внутреннего и внешнего пятиугольников равнялось одному и тому же числу Б?

2. Дан треугольник с периметром 63 см, одна из сторон которого равна 21 см. Оказалось, что одна из медиан этого треугольника перпендикулярна одной из его биссектрис. Найдите длины сторон этого треугольника.

3. В ящике находились апельсины и лимоны, причем число лимонов равно — 1/3 числа апельсинов. Когда из ящика достали 7 лимонов и 15 апельсинов, то число лимонов составило 1/5 — от числа оставшихся апельсинов. Сколько лимонов и сколько апельсинов было в ящике?

4. На классной доске после урока математики остался чертеж осей координат и двух прямых (см. рисунок). Семиклассник Борис утверждает, что одна из нарисованных прямых задается уравнением $y = ax + b$, а другая - уравнением $y = bx + c$, где a, b, c - некоторые числа. Прав ли Борис?



5. Можно ли провести на плоскости 2000 прямых так, чтобы каждая

пересекалась с 1990 другими?

6. Среди 18 монет одна фальшивая. Настоящие монеты весят одинаково, фальшивая монета отличается по массе от настоящих. За какое наименьшее число взвешиваний на правильных чашечных весах без гирь можно определить, легче или тяжелее фальшивая монета, чем настоящая? (Находить фальшивую монету не нужно.)

7. Построить график функции: $\gamma = \frac{5\chi^2 - |\chi|}{\text{[illegible]}}$.

ОЛИМПИАДА 7-8 КЛАСС
3 **ОТБОРОЧНЫЙ ТУР ПО МАТЕМАТИКЕ.**

1. Составьте из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 три трехзначных числа так, чтобы сумма двух чисел равнялась третьему и при этом у одного из этих чисел цифра десятков была равна 8. (Каждую цифру нужно использовать один раз.)

2. В школе, где учится больше 225, но меньше 245 учеников, часть учеников являются отличниками, а остальные — хорошистами. После сложной контрольной работы 2/7 отличников стали хорошистами, а хорошисты так и остались хорошистами за исключением одного человека, который стал троечником. При этом хорошистов и отличников стало поровну.

3. Квадрат размером 40х40 клеток разбит на полоски 1х47. Для каждой вертикальной полоски написали номер столбца, в котором она лежит, а для каждой горизонтальной — номер строки, в которой она лежит. (Строки и столбцы пронумерованы числами от 1 до 40.) Докажите, что сумма всех написанных чисел делится на 4.

4. На основании AC равнобедренного треугольника ABC $(AB = BC)$ отметили две разные точки F и E, а на боковых сторонах AB и BC — точки D и G соответственно так, что $AD + AE = AC$ и $CF+CG = AC$. Найти угол между прямыми DF и EG, если $<ABC=70^0$.

5. У натурального числа n имеются такие два разных делителя a и b, что $(a-1)(b + 2) = n-2$. Докажите, что 2n — квадрат натурального числа.

6. В каждой клетки доски 5х5 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или по вертикали) клетки. Докажите, что после этого останется одна пустая клетка.

7. Найдите все натуральные числа B для которых из 3-х следующих утверждений 2 будут верными, а одно ошибочное.

1) B+41 - является квадратом натурального числа.

2) B-21 - делится без остатка на 10.

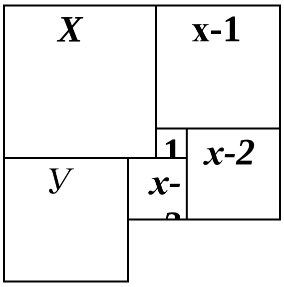
3) B-48 – является квадратом натурального числа

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 1-ГО ТУРА (7-8 КЛАСС).

1. Разложим число 1995 на простые множители: 1995 = =3x5x7x19. Надо разбить это произведение на две группы так, чтобы часть множителей составила исходное число, а другая часть была его цифрами. Так как цифры 19 нет, то число 19 войдет в исходное. После этого несложный расчет дает единственный ответ: 57x5x7 = 1995 .

2. Обозначим через *s* — стоимость сапфира, *t* — топаза, *i* - изумруда. Тогда из первого предложения стихотворения получаем $s + 2t = 3i$, а из второго будем иметь $7s + t = 8i$. Из этих двух условий исключим i. С этой целью умножим первое соотношение на 8, а второе - на 3. Получим $8s + 16t = 24i$, $21s + 3t = 24i$. Отсюда $8s + l6t = 21s + 3t$, т.е. $13s = 13t$, а значит, $t=s$, другими словами, стоимости топаза и сапфира равны.

3. Заметим, что сторона самого большого квадрата равна сумме сторон двух квадратов: следующего за ним по часовой стрелке и самого маленького. Обозначим сторону самого большого квадрата через *x*, тогда стороны других квадратов будут x-*1*, x-*2*, x-*3*, как показано на рисунке. Сторону левого нижнего квадрата нам выразить через x не удалось, поэтому обозначим ее через y. Заметим, что верхняя сторона прямоугольника равна $x + (x - 1)$, а нижняя - $(x - 2) + (x - 3) + y$. Но поскольку противоположные стороны прямоугольника равны, то получаем уравнение $x + (x — 1) = (x — 2)+\{x\text{-}3)+y$, откуда видно, что $y = 4$.



4. Трехзначное число, у которого в разряде сотен - цифра *a,* в разряде десятков - b, а в разряде единиц - цифра *c,* равно 100a + 10b + *c.* Просматривая по кругу все девять трехзначных чисел, замечаем, что любая цифра встречалась только по одному разу в каждом из разрядов — сотен, десятков и единиц. То есть любая цифра один раз войдет в нашу сумму с коэффициентом 100, один раз - с коэффициентом 10 и один раз - с коэффициентом 1. Значит, искомая сумма не зависит от порядка, в котором записаны цифры, и равна $(100 + 10 + 1)(l + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) =$ $111x45 = 4995.$

5. Попробуем проследить с конца, сколько и сколько и у какого пирата было монет после каждой игры. В последней игре первый

проиграл второму половину своих монет, после чего у него осталось 15 монет. Но это столько, сколько он только что отдал второму. Значит, перед этим у первого было 15х2 = 30 монет, а у второго 33 - 15 = 18 монет. Аналогично, во второй игре второй пират проиграл столько, сколько у него осталось после второй игры, т.е. 18 монет. Следовательно, перед второй игрой у второго пирата было 18х2 = 36 монет, а у первого - 30-12 = 18 монет. Рассуждая далее таким же образом, выясняем, что в начале у пиратов было по 24 монеты.

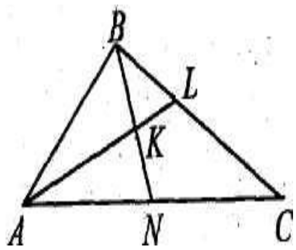
6. Обозначим искомое число лоскутков белого через *x*. Тогда лоскутков черного цвета 32-х. Чтобы составить уравнение, подсчитаем двумя способами количество границ белых лоскутков с черными. Каждый белый лоскут граничит с тремя черными, следовательно, число границ равно *3x*. С другой стороны, каждый черный лоскут граничит с пятью белыми и число границ **равно** 5(32-х). Получаем уравнение 3х = 5(32-х) т.е. 8х = **160** и х = 20.

7. Очевидно, что возле любого физика слева сидит лжец, поэтому количество физиков не больше числа всех лжецов. Также, слева от каждого химика сидит правдивый, поэтому количество химиков не больше числа всех правдивых. Откуда следует, что *2n≤2n.* А это значит, что число физиков n и равно числу лжецов. Поскольку физиков-лжецов-физиков и химиков-лжецов-химиков — поровну, то *n* — четное.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 2-ГО ТУРА (7-8 КЛАСС).

1. Ответ: нельзя.

Допустим, удалось расставить числа требуемым образом. Обозначим через x число, стоящее в центральном кружочке. Все остальные числа находятся в кружочках, образующих два пятиугольника, поэтому x+2B=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11=66, откуда $x = 66 - 2B$. Так как числа 66 и $2B$ четные, то x тоже должно быть четным. Теперь сложим все суммы чисел, стоящих на выходящих из центра отрезках. Получится 5А. При этом число x будет учитываться пять раз, а все остальные - по одному разу, т.е. x один раз войдет в сумму 1 + 2 + ... + 11 = 66 и еще составит слагаемое $4x$. Поэтому можно составить уравнение $5A = 4x + 66$. Значит, число $4x + 66$ должно делиться на 5. Этому условию среди чисел от 1 до 11 удовлетворяет, учитывая, что Х должно быть четным, $x = 6$. Подставляя это значение в уравнение, находим $4A=90$, А = 18. Стало быть, на каждом из пяти выходящих из центра отрезков сумма двух чисел, стоящих там вместе с x, должна равняться 18 — 16 = 12. Получается, что на одном отрезке должны стоять числа 1 и 11, 2 и 10, 3 и 9, 4 и 8, 5 и 7. Заметим, что три из пяти перечисленных пар чисел состоят из нечетных чисел, и две - из четных. Поэтому в вершинах каждого из двух пятиугольников должны находиться три нечетных и два четных числа. Это означает, что число B, являющееся суммой трех нечетных и двух четных чисел, должно быть нечетным. Но при x = б получим B = 30. Получили противоречие.



2. Пусть ABC — данный треугольник, а AL и BN-его соответственно биссектриса и медиана, пересекающиеся под прямым углом, и K - точка их пересечения. Так как AL - биссектриса, то $<KAN = <KAB$, а тогда легко видеть, что $<KNA = <ABK$. Поэтому ΔNAB - равнобедренный; обозначим длину его равных сторон AB и, AN через a. Тогда $AC = 2a$. Определим, какая из сторон AB, AC или BC треугольника ABC может равняться 21 см. Если $AB = 21$, то AC = 2х21 = 42 и периметр ΔABC больше 63, что противоречит условию задачи. Предположим, что $AC = 2a = 21$.

В этом случае $AB =1/2\ AC =10{,}5$, и так как по условию периметр ΔABC равен 63, то ВС = 31,5, т.е. $BC=AB+AC$, чего быть не может. Поэтому остается последняя возможность: BC=21; тогда За = 42, $AB = a = 14$, $AC = 2a = 28$. Треугольник с таким периметром существует, при этом его биссектриса AL действительно перпендикулярна медиане BN.

3. Пусть х - число апельсинов, а у - число лимонов в ящике. Из условия задачи получаем систему уравнений

$$\gamma = \frac{1}{3}\chi$$

$$\gamma - 7 = \frac{1}{5}(x - 15)$$

решая которую находим x=30, y=10.

4. Поскольку, как видно из приведенного в условии задачи рисунка, при $x = 0$ значения линейных функций $y = ax + b$ и $y = bx + c$ отрицательны, то $b<0$, $c<0$. Следовательно, функция $y = bx + c$ должна пересекать ось абсцисс при отрицательном $x = -c/b$. Но обе прямые пересекают ось абсцисс в ее положительной части. Получили противоречие. Следовательно, Борис не прав!

5. Покажем, как это можно сделать. Если каждая прямая пересекает 1990 других, то она параллельна остальным 2000 — 1990 — 1 = 9 прямым. Получается, что все прямые разбиваются на группы по 10 параллельных прямых. Но такая ситуация возможна. Необходимо рассмотреть 200 семейств, каждое из которых содержит по 10 параллельных прямых, эти прямые не должны быть параллельны ни одной из прямых других 199 семейств.

6. Занумеруем монеты. Разобьем множество монет на три кучки, по 6 монет в каждой.

При первом взвешивании положим на одну чашку весов все монеты первой кучки, на другую — второй. Возможны два случая.

1) Пусть при этом взвешивании весы оказались в равновесии. Тогда фальшивая монета находится в третьей кучке.

Теперь положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую — третью. Если, например третья кучка перетянет, то фальшивая монета тяжелее настоящей.

2) Пусть при первом взвешивании весы были в неравновесии. Тогда фальшивая монета находится или в первой, или во второй кучке.

Следовательно, все монеты третьей кучки — настоящие.

Положим на одну чашку весов первую кучку монет, на другую — третью. Если весы оказались в неравновесии, то фальшивая монета находится в первой кучке, и последнее взвешивание покажет, легче она или тяжелее, чем настоящая. Если же весы оказались в равновесии, то фальшивая монета — во второй кучке, и по первому взвешиванию также можно определить, легче она или тяжелее настоящей.

Ответ: за два взвешивания.

7. Следует построить график функции y=5/2x-1/2 при x>0.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ 3-ГО ТУРА (7-8 КЛАСС).

1. Один из возможных ответов приведен справа.   162
783

Основная трудность задачи — догадаться, что в примере должен быть перенос. Действительно, если при сложении не было ни одного переноса, то в каждом разряде было либо 3 четных цифры, либо 2 нечетных и одна четная. Таким образом, в каждом разряде должно быть четное количество нечетных цифр, и, следовательно, всего использовано четное число нечетных цифр. Но это неверно, так как всего имеется 5 нечетных цифр.

2. Ответ: 231 или 241 ученик.

Разделим всех отличников перед контрольной на 7 равных групп. Можно считать, что после контрольной 2 из этих групп стали хорошистами, а остальные 5 — остались отличниками. Тогда хорошистов в школе стало тоже ровно 5 групп. Итого, общее количество отличников и хорошистов делится на 10. Таким образом, с учетом троечника количество учеников может быть равно 231 или 241. Ясно, что каждый из этих случаев может иметь место: в первом случае перед контрольной было 7/10х230 отличников, а во втором случае — 7/10х240 отличников.

3. Решение 1 (раскраска). Закрасим некоторые клетки квадрата, как показано на рисунке. Всего закрашено 600 клеток. Заметим, что, как бы мы ни разместили полоску, остаток, который дает написанное на ней число при делении на 4, равен количеству накрытых ею закрашенных клеток. Таким образом, сумма написанных на полосках чисел будет давать тот же остаток при делении на 4, что и общее количество закрашенных клеток, а оно делится на 4.

		X				X	
	X	X			X	X	
X	X	X		X	X	X	
		X				X	
	X	X			X	X	
X	X	X		X	X	X	

Решение 2 (оснащение). Расставим в квадрате числа 0, 1, 2 и 3, как показано на рисунке. Как бы ни была расположена полоска 1х4, она накрывает ровно одно число, причем это число в точности равно

остатку, который дает при делении на 4 написанное на полоске число. Следовательно, сумма написанных на полосках чисел имеет тот же остаток при делении на 4, что и сумма чисел, записанных в клетках квадрата, а она равна 1000.

	1				1		
1	2	3	0	1	2	3	0
	3				3		
	0				0		
	1				1		
1	2	3	0	1	2	3	0
	3				3		
	0				0		

4. Пусть *O* — точка пересечения прямых *DF* и *EG* (рис. 8). *AC* = *AE*+*EF*+*FC*, но так как *AC* = *AD* + *AE*, *AD* = *EF*+*FC* = *EC; AC* = *CF* + *CG*, тогда *CG* = *AE* + *EF* = *AF*. Значит, Δ*DAF* =Δ*ECG* по двум сторонам и углу между ними. Отсюда <*ADF* = <*GEC*' = <1, <*EGC* =<*DFA* = =<*2*. Из Δ*ADF* находим: <l + <2 = 180°-<*DAF* = 125°. Тогда *ZEOF* = 55°. *Ответ.* 55.

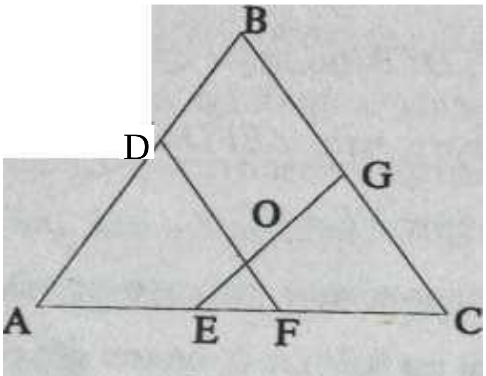


Рис. 8

5. Имеем равенство $ab + 2a - b = n$. Так как a и b — разные делители числа n, то $b \vdots a$ и $2a \vdots b$. Отсюда следует, что $b = 2a$ и $2n = 4a^2 = (2a)$.

6. Раскрасим клетки доски через одну в два цвета – белый и черный. При этом 12 клеток и 13 окажутся окрашенными в один цвет. Например, белый – 12, остальные 13 – в другой, черный. Каждый жук переползает на клетку другого цвета. Так как жуков, которые первоначально сидели в черных клетках 13, а в белых 12, то после переползания всех жуков, по меньшей мере 1 черная клетка останется пустой.

7. Ответ: B=1984.

Предположим, что B-21 делится без остатка на 10. Тогда число B оканчивается цифрой 1, но тогда остальные утверждения являются ошибочными, поскольку точные квадраты не могут оканчиваться цифрами 2, 3. Таким образом, ошибочным может быть только второе утверждение. Для некоторых натуральных чисел n и m будем иметь: $B+41=n^2$, $B-48=m^2$, отсюда имеем $(n - m)*(n + m)=89$. Число 89 является простым, а поэтому n =45, m=44. остается проверить, что число B=1984 действительно удовлетворяет условию задачи.

Литература:

1. «Нестандартные олимпиадные задачи по математике» П.А.Вакульчик. г.Минск. УниверсалПРЕСС, 2004г. Серия «Готовимся к экзамену».

2. «Новые олимпиады по математике» И.С.Маркова. г.Ростов-на-Дону, Изд.: «Феникс», 2005г. Серия «Здравствуй, школа».

3. «Задачи логического характера. Нестандартные задачи по математике». Е.В.Галкин. г. Москва. Изд.:Просвещение, 1996г.

4. Приглашение на математический праздник. Под. ред. И.В. Ященко. г.Москва.: Изд.: МЦНМО. 2005 г.

5. Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике. Составитель: С.В. Иванов, К.П. Кохась и др. г. Санкт-Петербург. 2003г.

6. Задачи математических олимпиад. И.Л. Бабинская. г.Москва. Изд. «Наука», 1975 г.

Составитель, отвественный учитель математики «Лицея 38» Жаберова Раиса Петровна.