Задания и решения для районных (городских) олимпиад по математике
2007-2008 учебный год

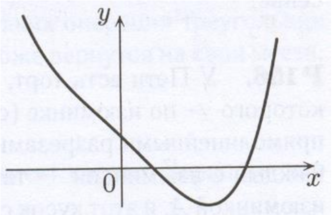
11 класс

1. Какое наименьшее количество чисел нужно исключить из набора 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 так, чтобы оставшиеся числа можно было разбить на две группы с одинаковым произведением чисел в группах? Приведите пример такого разбиения на группы.

Ответ. Нужно исключить три числа, например, 3, 7 и 11.

Подойдут группы, произведение чисел в которых равно 1440, например, {4, 5, 8, 9} и {2, 6, 10, 12}. Очевидно, что числа 7 и 11 должны быть исключены. Произведение остальных чисел есть $2^{10}\cdot 3^5\cdot 5^2$, поэтому ещё необходимо исключить число 3 или 12.

2. Дан график функции $y = ax^4 - x^2 + bx + c$ **(см. рис.). Найдите знаки чисел *a,b и c*.**



Ответ. $a > 0, b < 0, c > 0$.

Пусть $x \to +\infty y \to +\infty$, значит, $a > 0$. График пересекает ось Oy в точке с положительной ординатой, значит, $c = y(0) > 0$. В этой же точке функция убывает, значит, $y'(0) < 0$. Но $y' = 4ax^3 - 2x + b$, т.е., $y'(0) = b < 0$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}tgz; \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2}ctgz \end{cases}$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n_1; \frac{\pi}{4} + 2\pi m_1; \frac{\pi}{4} + \pi k_1\right), n_1, m_1, k_1 \in Z$ и $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n_2; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m_2; \frac{3\pi}{4} + \pi k_2\right), n_2, m_2, k_2 \in Z$.

Очевидно, что $tgz \neq 0$, так как в противном случае $ctgz$ не определен. Пусть $tgz = a > 0$. Сложив оба уравнения, мы получим $\sin x + \sin y + \cos x + \cos y = \sqrt{2}tgz + \sqrt{2}ctgz$. Заметим, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin(x + \frac{\pi}{4}) \leq \sqrt{2}$. Причем равенства достигаются только при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$. То есть левая часть не больше $2\sqrt{2}$. Рассмотрим теперь правую часть. Она $\left(a + \frac{1}{a}\right)\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$, причем равенство достигается при $tgz = ctgz = 1$, то есть при $z = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Таким образом, $(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) \leq 2\sqrt{2} \leq \sqrt{2}(tgz + ctgz)$. Уравнение имеет решения, только когда оба неравенства обращаются в равенства. Очевидно, что найденные *x, y* и *z* являются решением системы.

Пусть теперь $tgz < 0$. Аналогичным образом находим решения: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n, y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m, z = \frac{3\pi}{4} + \pi k$.

4. Площадь проекции некоторого параллелепипеда *P* на плоскость одной из его граней равна площади этой грани, площадь проекции *P* на плоскость другой грани в полтора раза больше площади этой грани, наконец, площадь проекции *P* на плоскость третьей грани в два раза больше площади этой грани. Найдите углы в этих гранях параллелепипеда *P*.

Ответ. $I - 45^0$ и 135^0, II и III – все углы по 90^0.

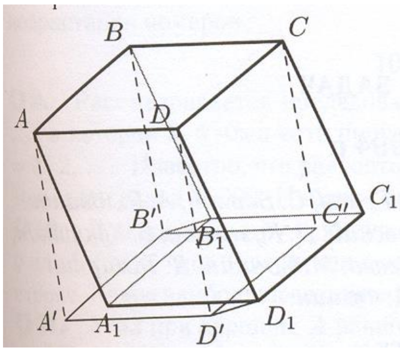


рис.1

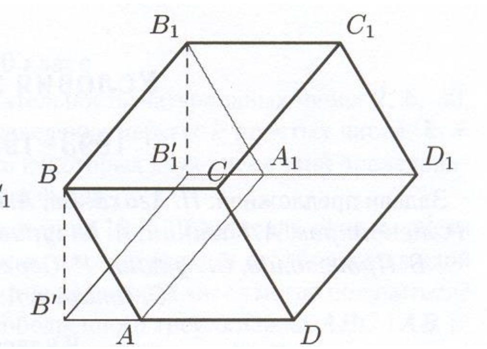


рис. 2

Пусть $A_1B_1C_1D_1$ - первая грань данного параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1ABCD$, $A'B'C'D'$ - проекция грани $ABCD$ на плоскость $A_1B_1C_1$ (см. рис. 1). Тогда из условия следует, что параллелограммы $A'B'C'D'$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают, значит, ребра AA_1, BA_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны плоскости $A_1B_1C_1$ и, следовательно, четыре другие грани – прямоугольники. Тогда площадь проекции P на плоскость A_1ADD_1 есть сумма площадей этой грани и проекции грани A_1ABB_1(см. рис. 2), т.е. $S_2 = AD \cdot AA_1 + AB\cos\varphi \cdot AA_1$, где φ - угол между плоскостями граней A_1ABB_1 и A_1ADD_1. Отсюда $AD + AB\cos\varphi = 1{,}5AD$. Аналогично, $AB + AD\cos\varphi = 2AB$, т.е. $AB\cos\varphi = \frac{1}{2}AD$, $AD\cos\varphi = AB$, откуда $\cos^2\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\varphi = 45^0$. Но φ - это угол D в грани $ABCD$.

5. У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов, и при этом он использовал краски всех трех цветов?

Ответ. 1530 способами.

Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую – одной из двух оставшихся. Третью – одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски и т.д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первую доску можно покрасить тремя способами, а вторую – двумя, далее покраска определяется однозначно). Итого 1536-6=1530 способов.