Управление образования и науки Белгородской области

Белгородский региональный институт повышения квалификации и профессиональной переподготовки специалистов

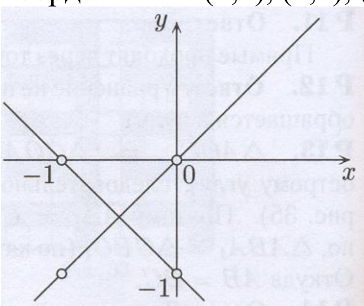
Задания для районных (городских) олимпиад по математике
2005-2006 учебный год
11 класс

1. Изобразите на координатной плоскости множество всех точек L(x;y), координаты которых удовлетворяют уравнению $\frac{x^2+x}{y^2+y}=1$.
2. Докажите неравенство:
$$\sin^2\alpha\cos^6\alpha \le \frac{3^3}{4^4}.$$
3. Сечение куба плоскостью – пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника меньше произведения двух самых длинных его сторон.
4. В комнате собрались 8 человек. Некоторые из них лгут, а остальные – честные люди, всегда говорящие правду. Один из собравшихся сказал: «Здесь нет ни одного честного человека». Второй сказал: «Здесь не больше одного честного человека». Третий сказал: «Здесь не более двух честных людей» и т.д. до восьмого, который сказал: «Здесь не более семи честных людей». Сколько в комнате честных людей? Ответ обоснуйте.
5. Каждое из чисел $N_{1,}N_2,...N_{2005}$ является суммой квадратов двух целых чисел. Докажите, что произведение $N_1\cdot N_2\cdot...\cdot N_{2005}$ также является суммой квадратов двух целых чисел.

Решения районных (городских) олимпиад по математике
2005-2006 учебный год
11 класс

1. **Изобразите на координатной плоскости множество всех точек L(x;y), координаты которых удовлетворяют уравнению** $\frac{x^2+x}{y^2+y}=1$**.**

Ответ: Прямые, заданные уравнениями $y=x$ и $y=-x-1$, с выколотыми точками с координатами (0;0), (0;1), (-1;0), (-1;-1). (см. рис.1)



(рис.1)

2. **Докажите неравенство:**

$$\sin^2\alpha\cos^6\alpha \le \frac{3^3}{4^4}.$$

1 решение:

Представим данное неравенство в виде:

$$3\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha) \le \left(\frac{3}{4}\right)^4. \quad (1)$$

Поскольку все множители неотрицательны, то неравенство эквивалентно такому:

$$\sqrt[4]{3\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)} \le \frac{3}{4}.$$

Используя неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим, получаем:

$$\sqrt[4]{3\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)(1-\sin^2\alpha)} \le \frac{3\sin^2\alpha+(1-\sin^2\alpha)+(1-\sin^2\alpha)+(1-\sin^2\alpha)}{4}=\frac{3}{4}.$$

Это доказывает справедливость неравенства (1).

2 решение:

Обозначим $cos^2\alpha=t$, тогда $\sin^2\alpha=1-t$.

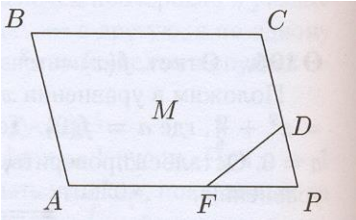
Надо доказать, что $(1-t)t^3 \le \frac{3^3}{4^4}$ для всех $0\le t\le 1$. Или, что тоже самое, наибольшее значение функции $f(t)=(1-t)t^3$ на отрезке $[0;1]$ не превосходит $\frac{27}{256}$. Имеем $f'(t)=3t^2-4t^3=t^2(3-4t)$.

Значит $t=0, t=\frac{3}{4}$ - критические точки функции. Далее $f(0)=f(1)=0$, $f\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3^3}{4^4}$ - наибольшее значение.

3. **Сечение куба плоскостью – пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника меньше произведения двух самых длинных его сторон.**

Решение:

Куб имеет 3 пары параллельных граней, поэтому если сечение – пятиугольник M, то M имеет 2 пары параллельных сторон (на рис. 2. $AF\|BC$ и $CD\|AB$). Таким образом, M может быть получен из некоторого параллелограмма (на рис.2.) отрезанием треугольника (ΔPDF) прямой, пересекающей две его соседние стороны. Отсюда $S_M < S_{ABCP} \le AB\cdot BC$, а произведение длин двух сторон пятиугольника не больше произведения длин двух самых длинных его сторон.



(рис.2.)

4. В комнате собрались 8 человек. Некоторые из них лгут, а остальные – честные люди, всегда говорящие правду. Один из собравшихся сказал: «Здесь нет ни одного честного человека». Второй сказал: «Здесь не больше одного честного человека». Третий сказал: «Здесь не более двух честных людей» и т.д. до восьмого, который сказал: «Здесь не более семи честных людей». Сколько в комнате честных людей? Ответ обоснуйте.

Решение:

Начнем рассуждение с высказывания восьмого человека «Здесь не более 7 честных людей». Если восьмой – честный, то все хорошо. Если лжёт, то в комнате 8 честных людей, что противоречит тому, что восьмой – лжец. Значит, восьмой не может лгать, значит - он честный. Первый сказал, что в комнате нет честных людей. Но восьмой – честный, поэтому – первый солгал. Значит первый – лжец. Рассматривая высказывание седьмого человека, получим, что он не может быть лжецом. Иначе, в комнате должно быть 7 или 8 честных людей. Но первый – лжец. Поэтому, седьмой будет честным. Рассуждая далее аналогично, получим, что второй, третий и четвертый будут лжецами, а шестой и пятый – честными. Тогда в комнате будет 4 честных человека.

Ответ. 4 честных человека.

5.Каждое из чисел $N_{1,}N_2,...N_{2005}$ является суммой квадратов двух целых чисел. Докажите, что произведение $N_1 \cdot N_2 \cdot ...N_{2005}$ также является суммой квадратов двух целых чисел.

Решение:

Проведем доказательство утверждения для произвольного набора $N_{1,}N_2,...N_n$ методом математической индукции. Покажем, что оно справедливо при $n=2$. Пусть $N_1 = a_1^2 + b_1^2$ и $N_2 = a_2^2 + b_2^2$, где a_1, b_1, a_2, b_2 - целые числа.

Тогда:

$N_1N_2 = (a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) = a_1^2a_2^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + b_1^2b_2^2 = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1)^2$, т.е. N_1N_2 является суммой квадратов двух целых чисел $a_1a_2 - b_1b_2$ и $a_1b_2 + a_2b_1$. Пусть теперь утверждение задачи справедливо при $n = k(k>2)$, тогда $N_1N_2...N_k = A_k^2 + B_k^2$, где A_k и B_k - целые числа.

Исходя из предположения индукции , а также руководствуясь тем, что утверждение справедливо при $n=2$, докажем её справедливость при $n=k+1$.

Пусть $N_{k+1} = a_{k+1}^2 + b_{k+1}^2$, где a_{k+1} и b_{k+1}- целые числа. Имеем:

$(N_1N_2...N_k)N_{k+1} = (A_k^2+B_k^2)(a_{k+1}^2+b_{k+1}^2) = (A_ka_{k+1} - B_kb_{k+1})^2 + (A_kb_{k+1} + B_ka_{k+1})^2 = A_{k+1}^2 + B_{k+1}^2$, где A_{k+1} и B_{k+1}-целые числа.

По принципу математической индукции утверждение справедливо при любом натуральном $n \geq 2$.